République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Ecole Supérieure de Gestion et d'Economie Numérique

ESGEN - Koléa

Département Classes Préparatoires

Probabilités

Cours et exercices corrigés

Deuxième année classes préparatoires

Réalisé par Dr Karima Zerfaoui (Maitre de conférence à l'ESGEN)

Algérie 2024

Table des matières

Introduction

Les probabilités sont une branche essentielle des mathématiques, avec des applications dans de nombreux domaines tels que la physique, l'ingénierie, l'économie, et bien d'autres. Ce polycopié est destiné aux étudiants de deuxième année des classes préparatoires économie et sciences de gestion et vise à fournir une compréhension approfondie des concepts fondamentaux des probabilités. La maîtrise de ces notions est cruciale pour la réussite académique et professionnelle future.

Ce cours est structuré autour de quatre chapitres principaux, chacun traitant d'un aspect clé des probabilités : les variables aléatoires discrètes, les variables aléatoires continues, les vecteurs discrets et les vecteurs continus. Chaque chapitre abordera les définitions, les concepts fondamentaux, et les théorèmes importants, avec un accent particulier sur les applications pratiques et les méthodes de résolution des problèmes.

Le premier chapitre est consacré aux variables aléatoires discrètes. Vous découvrirez les fonctions de probabilité et de distribution, ainsi que les concepts d'espérance et de variance. Nous examinerons également les lois usuelles telles que la loi binomiale, la loi géométrique et la loi de Poisson, indispensables pour comprendre les phénomènes discrets.

Le deuxième chapitre se concentre sur les variables aléatoires continues. Nous étudierons les densités de probabilité, les fonctions de répartition et les moments. Les lois continues usuelles, comme la loi normale, la loi exponentielle et la loi uniforme, seront analysées en détail. Ces notions sont essentielles pour modéliser et analyser des phénomènes continus dans divers contextes.

Le troisième chapitre aborde les vecteurs discrets, c'est-à-dire les couples de variables aléatoires discrètes. Vous apprendrez à travailler avec les fonctions de distribution conjointe et marginale, ainsi qu'avec les concepts de covariance, de corrélation et d'indépendance. Ces notions vous permettront de comprendre les relations entre plusieurs variables aléatoires discrètes et d'analyser des phénomènes complexes.

Le quatrième chapitre se concentre sur les vecteurs continus, c'est-à-dire les couples de variables aléatoires continues. Nous explorerons les fonctions de densité conjointe, les distributions marginales, et les concepts de covariance et de corrélation dans le contexte continu. Ce chapitre permettra de généraliser les notions vues précédemment et de les appliquer à des variables continues.

À travers ce polycopié, vous développerez des compétences en raisonnement logique et analytique, indispensables pour aborder les problèmes probabilistes. Des exercices et des exemples pratiques vous aideront à renforcer votre compréhension et à appliquer les théories probabilistes à des situations concrètes.

Malgré toute l'attention prêtée à la réalisation de ce polycopié, il peut contenir des omissions ou des erreurs. Pour toute remarque ou commentaire concernant le manuscrit, merci de contacter l'auteur à l'adresse électronique suivante : kzerfaoui@esgen.edu.dz

Chapitre 1
Variables aléatoires discrètes

1 Définitions et généralités

1.1 Espaces probabilisés

Nous allons ici acquérir des compétences pour représenter des expériences aléatoires comme le lancer d'une pièce de monnaie, le tirage de boules dans une urne ou le mélange d'un paquet de cartes. Les résultats de ces expériences, par définition, sont incertains et peuvent changer d'une expérience à l'autre, ce qui ne semble pas très compatible avec le langage mathématique auquel on est habitué. Il sera donc nécessaire de faire quelques efforts pour obtenir une description précise. Avant de continuer, vous pouvez vous interroger sur l'utilisation que vous auriez faite des objets mathématiques que vous connaissez (ensembles, fonctions,...) pour représenter mathématiquement le hasard, dont nous avons tous une conception intuitive. La théorie présentée ci-dessous vous apparaîtra encore plus raffinée !
L'espace probabilisé est l'élément essentiel qui permet de rédiger correctement une expérience aléatoire. Trois éléments le composent : un univers $\boldsymbol{\Omega}$, une tribu $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ et une mesure de probabilité P (parfois appelée simplement probabilité). Maintenant, nous allons consacrer un peu de temps à chacune de ces notions.

1.2 Univers

Afin de décrire une expérience aléatoire, il est nécessaire de commencer par définir les résultats potentiels. Tous ces résultats sont connus sous le nom d'univers et seront notés $\boldsymbol{\Omega}$.
La taille de cet ensemble ne sera pas limitée : il pourra être fini, infini dénombrable ou infini non-dénombrable. Il convient de souligner que la sélection de l'univers n'est pas unique : il existe différentes manières raisonnables de décrire les choses. Voici quelques exemples :

- Lancer d'un dé : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- Deux lancers de dé successifs : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- Lancer d'une pièce de monnaie : $\Omega = \{\text{Pile}, \text{Face}\}$.

1.3 Tribus

Notre expérience aléatoire va produire un résultat $\omega \in \Omega$, et nous allons chercher à savoir si ce résultat est tombé dans telle ou telle partie $A \subseteq \Omega$ de notre univers. Une fois l'univers Ω spécifié, notre tâche suivante consiste à dresser une liste de tous les évènements $A \subseteq \Omega$ qui seront susceptibles de nous intéresser. L'ensemble de ces ´événements sera appelé tribu, et noté $\mathcal{F}$. Une tribu $\mathcal{F}$ est donc une collection ou encore une famille de parties de Ω.

On a donc $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\Omega)$.

Afin de définir une tribu, il sera nécessaire de respecter certaines règles de stabilité.

1.3.1 Définition Soit $\boldsymbol{\Omega}$ un ensemble et $\mathcal{F}$ une partie de $\boldsymbol{\Omega}$.
On dit que $\mathcal{F}$ est une tribu ($\sigma - \boldsymbol{alg}$è$\boldsymbol{bre}$) sur $\boldsymbol{\Omega}$ si :

1- $\boldsymbol{\Omega} \in \mathcal{F}$
2- $\forall\ \boldsymbol{A} \in \mathcal{F}\ ,\ \overline{\boldsymbol{A}} \in \mathcal{F}$ (Complémentaire)
3- $\forall\ (\boldsymbol{A_i})_{i \geq 1}\ ,\ \bigcup_{i=1}^{\infty} \boldsymbol{A_i} \in \mathcal{F}$ (Union dénombrable)

Remarque 1.3.1 On rappelle qu'un ensemble dénombrable est un ensemble qui est en bijection avec une partie de $\mathbb{N}$ (ou, de façon équivalente, on peut aussi de définir un ensemble dénombrable comme un ensemble qui peut être injecté dans $\mathbb{N}$). On notera donc que dans ce cours un ensemble d´dénombrable peut être fini ou dénombrable infini.

Exemple 1.3.1

$\mathcal{F} = \{\emptyset\ , \boldsymbol{A}, \overline{\boldsymbol{A}}, \boldsymbol{\Omega}\}\ ,\ \ \boldsymbol{A}\ \boldsymbol{et}\ \overline{\boldsymbol{A}} \subset \boldsymbol{\Omega}$

$\mathcal{F}$ est-elle une tribu ?

1- La 1ère condition est vérifiée.
2- $\overline{\emptyset} = \boldsymbol{\Omega} \in \mathcal{F},\ \bar{A} = \complement A \in \mathcal{F}\ ,\ \overline{\overline{\boldsymbol{A}}} = \boldsymbol{A} \in \mathcal{F}$ ($2^{ème}$ Condition est vérifiée)
3- $\emptyset \cup \boldsymbol{A} \cup \overline{\boldsymbol{A}} \cup \boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\Omega} \in \mathcal{F}$

Les 3 conditions sont vérifiées on conclut que $\mathcal{F}$ est une Tribu.

Exemple 1.3.2

Si $\mathcal{F} = \{\emptyset\ , \mathbf{A}, \boldsymbol{\Omega}\}$ on remarque que $\complement \mathbf{A} = \overline{\mathbf{A}} \notin \mathcal{F}$

Donc $\mathcal{F}$ n'est pas une Tribu.

Remarque 1.3.2 $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ est la plus grande tribu sur Ω

1.3.2 Définition Soit$(\boldsymbol{\Omega}, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé. On appelle variable aléatoire réelle (v.a.r) toute application

$$X: \boldsymbol{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$w \longmapsto X(w)$$

Vérifiant : $\forall\ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}\ ,\ \boldsymbol{X^{-1}}(]-\infty, \boldsymbol{x}]) \in \mathcal{F}$

Tel que : $\boldsymbol{X^{-1}}(]-\infty, \boldsymbol{x}]) = \{\boldsymbol{w} \in \boldsymbol{\Omega}: \boldsymbol{X}(\boldsymbol{w}) \in]-\infty, \boldsymbol{x}]\} = \{\boldsymbol{w} \in \boldsymbol{\Omega}: \boldsymbol{X}(\boldsymbol{w}) \leq \boldsymbol{x}\}$

Exemple 1.3.3

On lance une pièce de monnaie deux fois et on observe le nombre de faces obtenues :

X : désigne le nombre de faces obtenues

1- Déterminer Ω et les valeurs prise par X .
2- Montrer que X est une variable aléatoire réelle sur Ω muni de la tribu $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\boldsymbol{\Omega})$

Solution

1- Ω=$\{PP, PF, FP, FF\}$

w	PP	PF	FP	FF
$X(w)$	0	1	1	2

Donc : $X(\Omega) = \{ 0 , 1, 2\}$.

$$\forall\, x \in \mathbb{R}: X^{-1}(]-\infty, x]) = \{w \in \Omega: X(w) \leq x\} \in \mathcal{P}(\Omega)$$

1er Cas : $x < 0$: $X^{-1}(]-\infty, x]) = \emptyset \in \mathcal{P}(\Omega)$

2ème Cas : $0 \leq x < 1$: $X^{-1}(]-\infty, x]) = \{w \in \Omega: X(w) = 0\} = \{PP\} \in \mathcal{P}(\Omega)$

3ème Cas : $1 \leq x < 2$: $X^{-1}(]-\infty, x]) = \{PP, PF, FP\} \in \mathcal{P}(\Omega)$

4ème Cas : $x \geq 2$: $X^{-1}(]-\infty, x]) = \Omega \in \mathcal{P}(\Omega)$

Conclusion : X est une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{F})$

Remarque 1.3.3 En général on note l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X, par $X(\Omega)$ et on l'appelle le ***support*** de X

1.4 Loi de Probabilité

1.4.1 **Définition** On appelle loi de probabilité de $\boldsymbol{X}$, l'application $\boldsymbol{P_X}: \boldsymbol{X}(\boldsymbol{\Omega}) \longrightarrow [\boldsymbol{0}, \boldsymbol{1}]$ Définie par :

$\forall\, x \in X(\Omega): P_X(x) = P(X = x) = P(X^{-1}(x))$

$$P(X^{-1}(x)) = P\{\omega \in \Omega: X(\omega) = x\}$$

1.4.2 **Définition** Soit $\boldsymbol{X}$ une variable aléatoire réelle de support $(\boldsymbol{\Omega})$. Si $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{\Omega})$ est un sous ensemble dénombrable de $\mathbb{R}$, $\boldsymbol{X}$ est alors appelé variable aléatoire discrète.

Exemple 1.4.1 Reprenons l'exemple précédent il est clair que le support de X est $X(\Omega) = \{ 0 , 1, 2\}$, donc X est une variable aléatoire discrète.

1.4.3 Proposition Si $\boldsymbol{X}$ ***et*** $\boldsymbol{Y}$ sont deux variables aléatoires réelles discrètes sur $(\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\mathcal{F}})$, alors :

a- Pour tous réels a, b : $aX + bY$ est une variable aléatoire discrète,
b- $X.Y$ est une variable aléatoire discrète,
c- $\sup(X, Y)$ *et* $\inf(X, Y)$ est une variable aléatoire discrète.

1.4.4 Définition Une fonction indicatrice est une fonction paramétrée par un sous ensemble de nombres réels, disons $\boldsymbol{A}$, et qui ne peut prendre que deux valeurs : la valeur 1 si la variable de la fonction est élément de $\boldsymbol{A}$,et la valeur 0 sinon**.**

Notation

$$\forall\, A \subseteq \mathbb{R}\; fixe, on\; définit\; la\; fonction :$$

$$1_A : \mathbb{R} \longrightarrow \{0,1\}$$

$$x \mapsto 1_A(x) = 1_{\{x \in A\}} = \begin{cases} 1\; si\; x \in A \\ 0\; si\; x \notin A \end{cases}$$

Noter que **:** $\mathbf{1}_{(-\infty,+\infty)} \equiv \mathbf{1}\;,\quad \forall\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$

Exemple 1.4.2 On considère

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < -1 \\ \dfrac{x+1}{4} & si\; -1 \le x < 3 \\ 1 & si \quad x \ge 3 \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{x+1}{4}\, 1_{\{-1 \le x < 3\}}(x) + 1_{\{x \ge 3\}}(x)$$

Propriétés

- $1_{A^c}(x) = 1 - 1_A(x)$
- $1_{A\cap B}(x) = 1_A(x).1_B(x)$
- $1_{A\cup B}(x) = 1_A(x) + 1_B(x) - 1_{A\cap B}(x)$

1.5 Fonction de répartition

1.5.1 Définition Soit $\boldsymbol{X}$ une v.a. sur $(\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\mathcal{F}}, \boldsymbol{P})$.
On appelle fonction de répartition de X, la fonction $F_X : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$ définit par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad \boldsymbol{F_X(x) = P(X \le x) = \sum_{k=-\infty}^{x} P(X = k)}$$

Exemple :

x	-3	-2	0	1
$P(X=x)$	0.4	0.3	0.2	0.1

1[er] Cas : $x < -3 :\ F_X(x) = 0$

2[ème] Cas : $-3 \leq x < -2$: $F_X(x) = P(X = -3) = 0.4$

3[ème] Cas : $-2 \leq x < 0 :\ F_X(x) = P(X = -3) + P(X = -2) = 0.7$

4[ème] Cas : $0 \leq x < 1$: $F_X(x) = P(X = -3) + P(X = -2) + P(X = 0) = 0.9$

5[ème] Cas : $x \geq 1$: $F_X(x) = P(X = -3) + P(X = -2) + P(X = 0) + P(X = 1) = 1$

Et on écrit :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < -3 \\ 0.4 & si \quad -3 \leq x < -2 \\ 0.7 & si \quad -2 \leq x < 0 \\ 0.9 & si \quad 0 \leq x < 1 \\ 1 & si \quad x \geq 1 \end{cases}$$

1.6 Propriétés de la fonction de répartition

1- $F_X(x)$ est croissante sur $\mathbb{R} \Leftrightarrow \{\forall\, x, y \in \mathbb{R} :\ x < y \implies F_X(x) \leq F_Y(x)\}$
2- $F_X(x)$ est continue à droite en tout point de $\mathbb{R}$ et admet une limite à gauche.

$$\forall\, a \in \mathbb{R},\ \lim_{x \to a^+} F_X(x) = F_X(a)$$

3- $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0 \qquad et \qquad \lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$

1.7 Probabilité attachée à un intervalle

Soit X une v .a. et $\boldsymbol{F_X(x)}$ sa fonction de répartition.

$\forall\, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}, \boldsymbol{a} < \boldsymbol{b}, \boldsymbol{on\ a}$:

. $P(a < x \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$

. $P(a \leq x < b) = F_X(b^-) - F_X(a^-)$, $\qquad F_X(a^-) = \lim_{x \to a^-} F_X(x)$.

. $P(a < x < b) = F_X(b^-) - F_X(a)$.

. $P(a \leq x \leq b) = F_X(b) - F_X(a^-)$.

. $P(X = a) = F_X(a) - F_X(a^-)$ $\quad$. $P(X < a) = P(X \leq a) - P(X = a) = F_X(a^-)$

. $P(X > a) = 1 - P(X \leq a) = 1 - F_X(a)$

Exemple 1.7.1 Soit X une v.a. de fonction de répartition

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & si \ \ x < 0 \\ \frac{1}{3} + \frac{x}{3} & si \ \ 0 \leq x < 1 \\ 1 & si \ \ x \geq 1 \end{cases}$$

Calculer : $P\left(\frac{1}{2} < X \leq \frac{3}{2}\right), P(0 < X < 5), P\left(X > \frac{3}{4}\right), P(X = 0)$

Solution :

- $P\left(\frac{1}{2} < X \leq \frac{3}{2}\right) = F\left(\frac{3}{2}\right) - F\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2.3}\right) = \frac{1}{2}$
- $P(0 < X < 5) = F(5^-) - F(0) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$
- $P\left(X > \frac{3}{4}\right) = 1 - P\left(X \leq \frac{3}{4}\right) = 1 - F\left(\frac{3}{4}\right) = 1 - \left(\frac{1}{3} + \frac{3}{4.3}\right) = \frac{5}{12}$
- $P(X = 0) = F(0) - F(0^-) = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$

1.7.1 Définition Une v.a. $\boldsymbol{X}$ est dite discrète si l'ensemble $\boldsymbol{X(\Omega)}$ est dénombrable fini ou infini, et sa fonction de répartition est une fonction en escalier.
Grace à la fonction de répartition on peut déterminer la loi de X.

$\boldsymbol{P(X = a) = F_X(a) - F_X(a^-)}$ $\quad si\ F_X\ est\ continue\ en\ a, alors\ P(X = a) = 0$

1.8 Loi d'une variable aléatoire discrète

1.8.1 Définition On appelle loi de probabilité la fonction $\boldsymbol{p(x)}$ telle que :

$$p(x) = \begin{cases} P(X = x) & , x \in X(\Omega) \\ 0 & , \ \ sinon \end{cases}$$

Cette fonction de probabilité jouit des propriétés suivantes :

$$p(x) \geq 0 \quad , \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\sum_{i=1}^{n} p(x_i) = 1$$

Exemple 1.8.1 Soit X la variable aléatoire discrète de loi de probabilité donnée par le tableau suivant

x	0	1	2
$P(X = x)$	1/4	2/4	1/4

Alors la fonction de répartition de X est

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < 0 \\ \frac{1}{4} & si \quad 0 \leq x < 1 \\ \frac{3}{4} & si \quad 1 \leq x < 2 \\ 1 & si \quad x \geq 2 \end{cases}$$

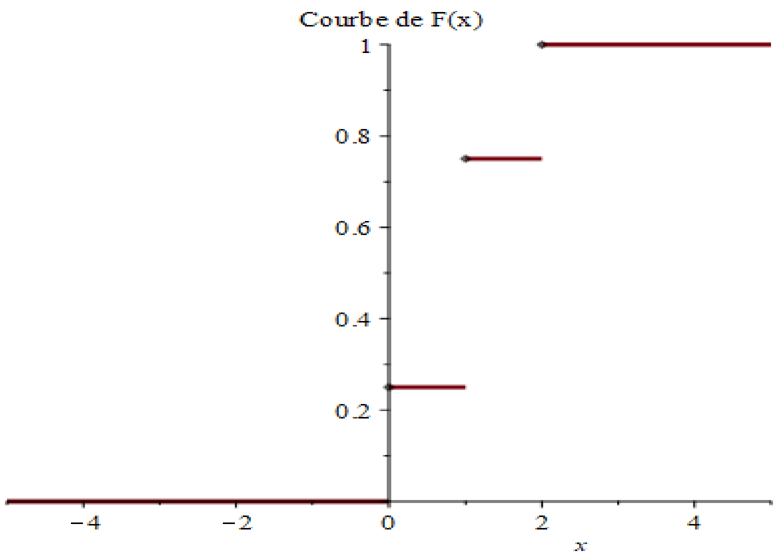
Et si on veut déterminer la loi de X à partir de la fonction de répartition on a

$\boldsymbol{X(\Omega) = \{0\,, 1, 2\}}$

$$\boldsymbol{P(X=0)} = F(0) - F(0^-) = \frac{1}{4} - 0 = \frac{1}{4}$$

$$\boldsymbol{P(X=1)} = F(1) - F(1^-) = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{2}{4}$$

$$\boldsymbol{P(X=2)} = F(2) - F(2^-) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$



1.9 Moment d'ordre, Espérance mathématique et Variance d'une variable aléatoire discrète

1.9.1 Définition Soit $\boldsymbol{X}$ une v.a. discrète, on dit que X admet un moment d'ordre $\boldsymbol{k}$ **($\boldsymbol{k} \in \mathbb{N}^*$) si :**

$$\sum_{x\in X(\Omega)} \boldsymbol{x.P(X=x)} \text{ est absolument convergente}$$

Et on a : $$E(X^k) = \sum_{x\in X(\Omega)} x^k.P(X=x)$$

Si $k=1$, on obtient la moyenne ou l'Esperance de X .

- La variance de la variable aléatoire X est le moment d'ordre 2 de la variable aléatoire $(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{E(X)})$

$$\boldsymbol{V(X)} = \boldsymbol{E((X-E(X))^2)} = \sum_{x\in X(\Omega)} \big(x-E(X)\big)^2 P(X=x) = \boldsymbol{E(X^2)} - [\boldsymbol{E(X)}]^2$$

- La quantité $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$ est appelée l'écart quadratique moyen ou l'écart type de la variable aléatoire X.

1.10 Fonction génératrice

Soit X une variable aléatoire discrète ne prenant que des valeurs entières positives ou nulles $(X(\Omega)\subset\mathbb{N})$

1.10.1 Définition On appelle fonction génératrice des **probabilités** de X la fonction $G_X(t)$ définie par :

$$\boldsymbol{G_X(t) = E(t^X) = \sum_{k=0}^{\infty} t^k P(X=k) = P(X=0) + tP(X=1) + \cdots \ldots\ldots \quad , t\in[-1,1]}$$

Propriétés

1- $G_X(0)=P(X=0)$

2- $\boldsymbol{G_X(1)=1}$

3- $\boldsymbol{P(X=k)} = \frac{\boldsymbol{G_X^{(k)}(0)}}{\boldsymbol{k!}}$, $\forall k\geq 0$

4- Si $E(X^k)$ existe alors :

$\boldsymbol{G_X^{(k)}(1) = E(X(X-1)(X-2)\ldots\ldots\ldots.(X-k+1))}$ appelé moment factoriel d'ordre k de X

En particulier :

$$\boldsymbol{G_X^{(1)}(1) = E(X)}$$

$$\boldsymbol{G_X^{(2)}(1)} = \boldsymbol{E\big(X(X-1)\big)} = E(X^2)-E(X) \Longrightarrow \boldsymbol{E(X^2) = G_X^{(2)}(1) + E(X)}$$

1.11 Fonction génératrice des moments

Le calcul des moments d'ordre k d'une variable aléatoire X est une tâche qui peut rapidement devenir laborieuse. Cependant il existe une manière permettant de les obtenir tous à partir d'une unique fonction, appelée $\boldsymbol{fonction\ g}$é$\boldsymbol{n}$é$\boldsymbol{ratrice\ des\ moments}$ $M_X(t)$, donnée par :

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \sum_{x \in X(\Omega)} e^{tx} P(X = x)$$

Le moment d'ordre n de la variable aléatoire X est donnée par :$E(X^n) = M_X^{(n)}(0)$

$$M_X^{(n)}(0): est\ la\ dérivée\ d'ordre\ \ n\ \ de\ M_X$$

Exemple : Déterminer la fonction génératrice de la variable aléatoire X lorsque :

1- X suit la loi de Bernoulli de paramètre p.
2- X suit la loi $B(n,p)$**.**

Solution

1- $X \leadsto B(p)$, $\mathrm{P(X = 0) = 1 - p = q}$, $P(X = 1) = p$

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \sum_{x \in X(\Omega)} e^{tx} P(X = x) = e^0 . q + e^t . p = q + pe^t$$

2- $X \leadsto B(n,p)$ $P(X = x) = C_n^x p^x (1-p)^{n-x}$

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \sum_{x \in X(\Omega)} e^{tx} P(X = x) = \sum_{x=0}^{n} e^{tx}\, C_n^x p^x (1-p)^{n-x}$$

$= \sum_{x=0}^{n} p^x e^{tx}\, C_n^x (1-p)^{n-x} = \sum_{x=0}^{n} C_n^x (pe^t)^x\, (1-p)^{n-x}$ (Binôme de Newton)

$$= (pe^t + q)^n$$

1.12 Quelques lois usuelles discrètes

1.12.1 Loi Uniforme *:* On dit qu'une v.a. $\boldsymbol{X}$ suit une loi uniforme discrète lorsqu'elle prend ces valeurs dans $\{\mathbf{1}, \dots, \boldsymbol{n}\}$ avec des probabilités identiques (équiprobables). Elle doivent être égales à $\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}}$.

$E(X) = \frac{n+1}{2}$, $V(X) = \frac{n^2-1}{12}$

Exemple

Le jet d'un dé à 6 faces suit une loi uniforme dont la loi de probabilité est la suivante :

x	1	2	3	4	5	6
P(X=x)	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

$E(X) = \frac{6+1}{12} = 3{,}5$ $\qquad V(X) = \frac{6^2-1}{12} = 2{,}61$

1.12.2 Loi de Bernoulli

Une v.a. ***X*** suit une loi de Bernoulli, lorsque l'expérience ne possède que deux résultats possibles de types « succès ou échec » « vraie ou faux » « pile ou face », etc.…

Le succès est représenté par l'évènement $\{X = 1\}$ et $\{X = 0\}$ correspond à un échec.

$$X(\Omega) = \{0\ ,1\}$$

$\mathrm{P(X = 0) = 1 - p = q}$, $P(X = 1) = p$, $p + q = 1$

Et on écrit : $X \leadsto B(p)$, $p \in [0,1]$

$$\mathrm{E(X) = p \quad et\ V(X) = p(1 - p) = pq}$$

Exemple On lance un dé **une fois**

$$\mathrm{p : la\ probabilité\ de\ tomber\ sur\ le\ chiffre\ 6}$$

$$\mathrm{1 - p : la\ probabilité\ de\ tomber\ sur\ un\ autre\ chiffre.}$$

$X \leadsto B(1/6)$,

$$X(\Omega) = \{0\ ,1\}$$

$\mathrm{P(X = 0) = 1 - 1/6 = 5/6}$, $P(X = 1) = 1/6$

$$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x) = 0.\frac{5}{6} + 1.\frac{1}{6} = \frac{1}{6}$$

$$E(X^2) = \sum_{x \in X(\Omega)} x^2P(X = x) = 0^2.\frac{5}{6} + 1^2.\frac{1}{6} = \frac{1}{6}$$

$V(X) = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2 = \frac{1}{6} - \frac{1}{36} = \frac{5}{36}$=1/6 .5/6=p.q

1.12.3 Loi Binomiale

La loi binomiale est la loi d'une v.a. représentant une série d'épreuve de Bernoulli, possédant les propriétés suivantes :

. Chaque expérience possède 2 résultats (succès, échec).

. Les expériences répétées sont identiques et indépendantes (tirages successifs **avec remise).**

. X : désigne le nombre de succès dans une suite de n épreuves.

Et on écrit :

$X \leadsto B(n,p)$,

$$X(\Omega) = \{0\,, \dots \dots, n\}$$

$$P(X=k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \qquad , k = 0, \dots \dots, n$$

$$E(X) = np \quad , \quad V(X) = np(1-p) = npq$$

Exemple On lance une pièce de monnaie 10 fois.

***X* :** nombre de piles obtenus au cours des 10 lancers.

-Calculer La probabilité d'obtenir exactement 3 piles.

$n = 10, p = 1/2$;

$X \leadsto B(10{,}1/2\,)$

$$X(\Omega) = \{0\,, \dots \dots, 10\}$$

$$P(X=k) = C_{10}^k \left(1/2\right)^k \left(1/2\right)^{10-k}$$

$$P(X=3) = C_{10}^3 \left(1/2\right)^3 \left(1/2\right)^{10-3} = 0.117$$

$$E(X) = 5 = \frac{10.1}{2} \quad , \qquad V(X) = \frac{5}{2} = 2{,}5$$

1.12.4 Loi Géométrique : Supposons que l'on répète une épreuve de Bernoulli et que l'on s'intéresse au nombre $\boldsymbol{X}$ de fois qu'il faut répéter cette épreuve pour obtenir le premier succès si ces répétitions sont indépendantes (tirages avec remise) et ont la même probabilité $\boldsymbol{p}$ de réussite, alors on dit que X suit la loi Géométrique de paramètre $\boldsymbol{p}$.

Et on écrit :

$X \leadsto G(p)$,

$$X(\Omega) = \{1\,,2, \dots \dots\} = \mathbb{N}^*,$$

$$P(X=k) = pq^{k-1}, \qquad k = \mathbb{N}^* \ , \quad E(X) = \frac{1}{p} \qquad , \ V(X) = \frac{q}{p^2} \ , \ F(x) = 1 - q^x$$

Pouquoi $F(x) = 1 - q^x$?

$$F(x) = P(X \le x) = \sum_{k=-\infty}^{x} P(X=k) = \sum_{k=1}^{x} pq^{k-1} = \frac{p}{q} \sum_{k=1}^{x} q^k =$$

$$\sum_{k=1}^{n} q^k = q.\frac{1-q^n}{1-q}$$

$$=\frac{p}{q}\ q\frac{1-q^x}{1-q} = 1-q^x, \qquad p+q=1$$

Exemple on dispose d'un trousseau de 5 clés identiques. Dans l'obscurité on essaie d'ouvrir une serrure sans porter attention à chaque clé essayée. Sachant qu'une seule convient .quelle est la probabilité d'utiliser la bonne clé au 10ème essai

$\boldsymbol{X \rightsquigarrow G\left(\frac{1}{5}\right)}$ $\qquad\qquad$ $\boldsymbol{X(\Omega) = \{1, \dots\dots\} = \mathbb{N}^*}$,

$$\boldsymbol{P(X=k) = \frac{1}{5}.(4/5)^{k-1}}$$

$P(X=10) = \frac{1}{5}.(4/5)^{10-1} = \frac{1}{5}.(4/5)^9$= 0,026

1.12.5 Loi Hypergéométrique

Soit une urne qui contient $\boldsymbol{N}$ boules dont $\boldsymbol{N_1}$sont blanches et $\boldsymbol{N_2}$ noires. On tire $\boldsymbol{n}$ boules sans remise. ($\boldsymbol{n \le N}$)

X: Nombre de boules blanches obtenues parmi les n.

On pose $p = \frac{N_1}{N}$ (Probabilité d'avoir une boule blanche)

$X(\Omega) = \{\max(0, n-N_2)\ , \min(n, N_1)\ \}$

Et on note : $X \rightsquigarrow H(N,n,p)$

$$P(X=k) = \frac{C_{N_1}^{k} C_{N_2}^{n-k}}{C_N^n} \quad , \quad \forall k \in X(\Omega)$$

$$E(X) = np \qquad et\ V(X) = npq\frac{N-n}{N-1}$$

Exemple Une machine à fabriqué 500 articles dont 5 sont défectueux. On tire au hasard 20 articles.

On supposera que le tirage est successif et sans remise.

1- Déterminer la moyenne et la variance du nombre de pièces défectueuses.
2- Quelle est la probabilité qu'aucun de ces 20 articles ne soit défectueux.
3- Répondez à la 2ème question si les tirages se font avec remise.

Solution

X: Nombre d'articles défectueux obtenues parmi les 20.

1-

$\boldsymbol{N = 500}$, $\boldsymbol{N_1 = 5}$, $\boldsymbol{N_2 = 495}$, $\boldsymbol{n = 20}$, $\boldsymbol{p = \frac{5}{500}}$

$$X(\Omega) = \{0,1,\dots,5\} = \{\max(0, n - N_2 = 0)\ , \min(n, N_1) = 5\ \}$$

$$\boldsymbol{X \sim H(N, n, p) = H(500, 20, 5/500)}$$

$$P(X = k) = \frac{C_5^k C_{495}^{20-k}}{C_{500}^{20}}$$

$$E(X) = np = 20.\frac{5}{500} = 0{,}2$$

$$V(X) = npq\frac{N-n}{N-1} = \frac{500-20}{499}20.\frac{5}{500}.\frac{495}{500} = 0{,}19$$

2- $\boldsymbol{P(X = 0) = \frac{C_5^0 C_{495}^{20-0}}{C_{500}^{20}} = \frac{C_{495}^{20}}{C_{500}^{20}} = 0,81}$

3- Si les tirages se font avec remise ;

$$X \sim B\left(20, \frac{5}{500}\right), \qquad X(\Omega) = \{0,1,2,3,\dots\dots,20\}$$

$$\boldsymbol{P(X = 0) = C_{20}^0 \left(\frac{5}{500}\right)^0 \left(1 - \frac{5}{500}\right)^{20} = 0,81}$$

1.12.6 Loi de Poisson (Loi des évènements rares)

La loi de Poisson est utilisée pour modéliser le nombre de réalisations d'un évènement dans un intervalle de temps. On peut donner comme exemple :

- Nombre d'accidents mortels / semaines.

- Nombre de bactéries dans un échantillon d'eau.

- Nombre d'erreur par page dans un livre.

Et on note : $X \sim \mathcal{P}(\lambda), \quad \lambda > 0, \quad X(\Omega) = \mathbb{N}$

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} \quad , \quad k \in \mathbb{N}$$

$$E(X) = V(X) = \lambda$$

Exemple

En moyenne chaque année, 2 accidents de travail sont observés au sein de l'école.

Quelle est la probabilité que pendant 1 année quelconque il y'ait 5 accidents.

Question : Pourquoi on pense à la loi de Poisson !

- Nombre moyen de réalisation des évènements en une unité de temps est le même.

- Nombre d'évènements dans une unité de temps sont indépendants les uns des autres (ie cette année on a 5 accidents, l'année prochaine y'aura 3, donc il n'Ya pas de lien entre les unités de temps)

- Probabilité qu'un évènement se réalise durant un petit intervalle ≈ 0 (ie le nombre d'accidents en 1 semaine est quasiment NUL)

Solution

$$X \rightsquigarrow \mathcal{P}(2), \quad P(X=5) = \frac{e^{-2}2^5}{5!} = 0.036$$

Exemple Dans un Fast Food 2 **clients/ 3 minutes** arrivent dans le magasin.

Quelle est la probabilité que **3** clients au plus arrivent en **9** minutes.

Solution :

1- $3mn \longrightarrow 2$

$9mn \longrightarrow$? $\qquad X = \frac{9.2}{3} = 6 = \lambda$

$$P(X=k) = \frac{e^{-6}6^k}{k!}$$

$$X \rightsquigarrow \mathcal{P}(6), \qquad P(X \leq 3) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) = 0.151$$

1.13 Approximation d'une loi Binomiale par une de Poisson

Proposition 1.13.1 Si $X \rightsquigarrow B(n,p)$ et sous les conditions que n assez grand (i.e. $n \longrightarrow \infty$) et $p$assez petit (i.e. $p \longrightarrow 0$) on peut approximer la loi de X par la loi de Poisson de paramètre np et on note $B(n,p) \approx P(np)$

Remarque 1.13.1 Dans la pratique on peut approximer la loi Binomiale $B(n,p)$ telle que n ≥ 30 et p ≤ 0.1 par la loi de Poisson de paramètre np.

1.14 Approximation d'une loi Hypergéométrique par une loi Binomiale

Proposition 1.14.1 Si $X \rightsquigarrow H(N,n,p)$ et sous les conditions que $\boldsymbol{N \geq 30\ et\ \frac{n}{N} \leq\ 0,1}$ on peut approximer la loi de X par la loi de X par la loi Binomiale $B(n,p)$.
et on note $B(n,p) \approx H(N,n,p)$

$$\boldsymbol{H(N,n,p)} \xrightarrow[N\geq 30\ \ et\ \frac{n}{N} \leq 0,1]{} \boldsymbol{B(n,p)} \xrightarrow[n\geq 30\ et\ p\ \leq 0.1 et\ np\leq 15]{} \boldsymbol{\mathcal{P}(np)}$$

1.15 Exercices

1.15.1 Exercice Soit $(\boldsymbol{\Omega}, \mathcal{P}(\boldsymbol{\Omega}), \boldsymbol{P})$ un espace probabilisé, soit $\boldsymbol{A_1}$,$\boldsymbol{A_2}$,$\boldsymbol{A_3}$ un système complet d'évènements de $\boldsymbol{\Omega}$ avec P($\boldsymbol{A_1}$) = 0.3, P($\boldsymbol{A_2}$) = 0.5, P($\boldsymbol{A_3}$) = $\boldsymbol{\alpha}$ .on pose $X(w) =\ 5.1_{A_1}(w) + 3.\,1_{A_2}(w) + 1_{A_3}(w), \quad w \in\ \Omega$

1- Déterminer α.
2- Déterminer la loi de X.
3- Calculer $E(X)\ et\ V(X)$.
4- Déterminer la fonction de répartition de X.
5- Calculer $P(-9 \leq X < 9), P(X = 6),, P[X^{-1}(]-8,6])], P[X^{-1}(]5,8[)], P(X \geq 5)$.

1.15.2 Exercice Soit F une fonction définie comme suit :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & si \quad\quad x < 0 \\ \frac{2}{18} & si \quad 0 \leq x < 1 \\ \frac{10}{18} & si\ \ 1 \leq x < 2 \\ \frac{13}{18} & si\ \ \ 2 \leq x < 3 \\ \frac{16}{18} & si\ \ 3 \leq x < 5 \\ 1 & si \quad x \geq 5 \end{cases}$$

1- F est-elle une fonction de répartition, si oui la variable associée est-elle discrète. Justifier.
2- Si X est la variable aléatoire ayant F comme fonction de répartition :
  a) Donner les valeurs prise par X
  b) Trouver la fonction de masse de X ;
  c) Calculer les probabilités suivantes :$P(\ -1 < X < 4)$, $P(X \geq 1/2), P(X > 1)$.
3- Y est une variable aléatoire définie comme suit : $Y = 2X^2 + 1$
  a) La variable Y est-elle discrète ? justifier.
  b) Déterminer la loi de Y.
  c) Déterminer la fonction de répartition de Y.
  d) Calculer ce qui suit : $F_Y(3,5), F_Y(1,2), F_Y(-1)\ et\ P(2 \leq Y \leq 15)$.

1.15.3 Exercice Un restaurant possède 50 places. La probabilité pour qu'une personne ayant réservé, ne vienne pas est de 20%. Un jour le patron a pris 52 réservations. Quelle est la probabilité pour qu'il se trouve dans une situation embarrassante ?

1.15.4 Exercice Une machine a fabriqué 500 articles dont 5 sont défectueux. On tire au hasard 20 articles. On supposera le tirage successivement avec puis sans remise.

1- Déterminer la moyenne et la variance du nombre de pièces défectueuses.
2- Quelle est la probabilité qu'aucun de ces 20 articles ne soit défectueux.

1.15.5 Exercice On tire 3 boules d'une urne contenant 3 blanches, 3 rouges et 5 noires. Supposons que l'on reçoive 1 DA pour chaque boule blanche tirée et que l'on doive au contraire payer 1 DA pour toute boule rouge tirée et 0 DA pour toute boule noire.

X : désigne le bénéfice net laissé par le tirage.

1- Donner la loi de probabilité de X.
2- Calculer le bénéfice moyen et V(X).
3- Soit la variable aléatoire $Y=X^2$. Calculer E(Y) de deux manières.

1.15.6 Exercice Un épicier reçoit un lot de pommes dont 25% sont défectueuse. Il charge un employé de préparer des emballages de 5 pommes chacun. Celui-ci, négligent, ne se donne pas la peine de jeter les fruits défectueux . Chaque client qui trouve, dans l'emballage qu'il achète , 2 fruits ou plus qui sont défectueuses, revient au magasin se plaindre.

1- Soit X : le nombre de pommes défectueuses dans un emballage .Déterminer la loi de X ?
2- Quelle est la probabilité pour qu'un client donné se plaigne auprès de son épicier ?

1.15.7 Exercice Une usine fabrique des sacs de sucre de poids d'un kilo. Une étude a montré que la probabilité qu'un sac ait une masse inférieure à 1 kilo est de 0.2. On prélève au hasard 20 sacs, avec remise et avec indépendance.

Soit X : la variable aléatoire qui associe le nombre de sac dont la masse est inférieure à 1 Kilo.

1- Déterminer la loi de X. son espérance et sa variance.
2- Calculer la probabilité qu'il y ait entre 5 et 7 sacs de masse inférieure à 1 kilo.
3- Combien de sacs faudrait-il prélever pour que la probabilité qu'il y ait au moins un sac dont la masse est inférieure à 1 kg soit d'au moins 99.5 %

1.15.8 Exercice Une société fabrique des microprocesseurs destinés aux producteurs de micro-ordinateur. La norme imposée par les clients est de 2 pièces défectueuses par 500. Le contrôle de cette société prélève 1000 pièces d'une série achevée. Calculer (de 2 manières) la probabilité que le nombre de pièces défectueuses soit :

a- Nul
b- Au plus égal à 3
c- Supérieur à 4

1.15.9 Exercice Un étudiant change de téléphone portable tous les ans, le jour de son anniversaire.il conserve toujours un téléphone une année entière.si le téléphone tombe en panne dans l'année, il le fait réparer et change tout de même de téléphone à la date prévue. On suppose que la probabilité qu'un téléphone portable tombe en panne dans l'année est $\boldsymbol{p}$. On suppose aussi qu'un téléphone ne peut pas subir plus d'une panne dans son année de possession par l'étudiant.

On note X la variable aléatoire « nombre de téléphones tombés en panne dans les 10 premières années »

1- Quelle loi suit la variable aléatoire X.
2- Donner la probabilité que l'étudiant ait 5 pannes de portables sur 10 premières années.
3- Donner l'espérance et la variance de X.

On suppose qu'un nouveau téléphone portable coute 10.000 DA. Lors de l'achat, l'étudiant peut l'assurer pour 1.000 DA auquel cas le portable sera réparé gratuitement (pendant 1 an).si le portable n'est pas assuré, le cout d'une réparation est de 5.000 DA.

On note **Y** la variable aléatoire « montant dépensé par l'étudiant en téléphonie s'il ne s'assure jamais sur les **10** premières années »

On compte donc Y la variable aléatoire le prix d'achat des téléphones ainsi que les réparations éventuelles.

4- Exprimer Y en fonction de X. Donner $Y(\Omega)$ et la loi de Y.
5- Combien dépensera l'étudiant en téléphonie les 10 premières années s'il assure tous ses téléphones ?
6- Pour quelles valeurs de $\boldsymbol{p}$ est-il préférable d'assurer ses téléphones ?

On s'intéresse maintenant à la première panne de téléphone que connait l'étudiant.

On note Z la variable aléatoire donnant l'année pendant laquelle l'étudiant subit sa première panne, en numérotant les années à partir de1 pour l'achat du premier téléphone.

7- Quelle loi suit la variable aléatoire Z.
8- Donner la probabilité que la première panne que connait l'étudiant soit sur son 3ème portable.

1.15.10 Exercice Soit $\boldsymbol{X}$ une v.a. discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$ de fonction génératrice $\boldsymbol{G_X(t) = \frac{1}{4}(1+t)^2}$

1- En utilisant $G_X(t)$, déterminer $E(X), E(X^2) et\ V(X)$
2- Déterminer la loi de Probabilité de X.

1.16 Solution des exercices

Solution de l'exercice 1.15.1 $P(A_1) = 0.3,\ P(A_2) = 0.5,\ P(A_3) = \alpha$

$$X(w) = 5.1_{A_1}(w) + 3.1_{A_2}(w) + 1_{A_3}(w)$$

1- Nous avons : $P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = 1 \Leftrightarrow P(A_3) = 1 - 0.8 = 0.2 = \alpha$
2- $X(w) = \{1,3,5\}$

$$P(X = 1) = P(X^{-1}(1)) = P\{\omega \in \Omega : X(\omega) = 1\} = P(A_3) = 0.2$$

$$P(X = 3) = P(X^{-1}(3)) = P\{\omega \in \Omega : X(\omega) = 3\} = P(A_2) = 0.5$$

$$P(X = 5) = P(X^{-1}(5)) = P\{\omega \in \Omega : X(\omega) = 5\} = P(A_1) = 0.3$$

x	*1*	*3*	*5*
$P(X = x)$	*0.2*	*0.5*	*0.3*

3-

$$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x) = 1.0{,}2 + 3.0{,}5 + 5.0{,}3 = 3{,}2$$

$$E(X^2) = \sum_{x \in X(\Omega)} x^2 P(X = x) = 1^2.0{,}2 + 3^2.0{,}5 + 5^2.0{,}3 = 12{,}2$$

$$V(X) = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2 = 12.2 - 10.24 = 1.96$$

4-

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < 1 \\ 0.2 & si \quad 1 \le x < 3 \\ 0.7 & si \quad 3 \le x < 5 \\ 1 & si \quad x \ge 5 \end{cases}$$

x	*1*	*3*	*5*
$P(X = x)$	*0.2*	*0.5*	*0.3*

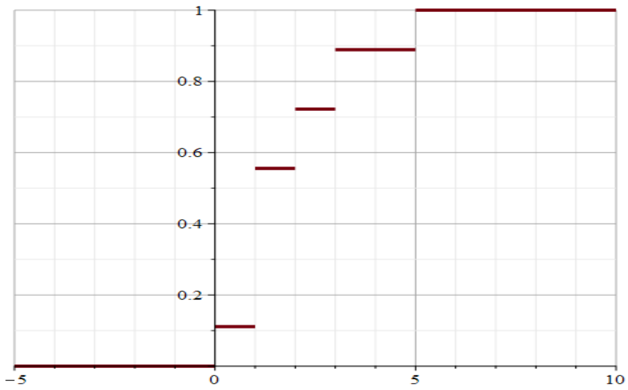
1- $P(-9 \le X < 9) = F(9^-) - F(-9^-) = 1 - 0 = 1.$
$P(X = 6) = F(6) - F(6^-) = 1 - 1 = 0.$

$P(X = 5) = 0.3$
$\mathbf{P}[\mathbf{X}^{-1}(]-\mathbf{8}, \mathbf{6}])] = \mathrm{P}\{\omega \in \Omega : -8 < \mathrm{X}(\omega) \le 6\} = \mathbf{P}(-\mathbf{8} < \mathbf{X} \le \mathbf{6}) =$
$= \mathrm{F}(6) - \mathrm{F}(-8) = 1.$
$P[X^{-1}(]5{,}8[)] = P(5 < X < 8) = F(8^-) - F(5) = 1 - 1 = 0.$
$P(X \ge 5) = P(X = 5) = 0.3.$

Solution de l'exercice 1.15.2

$$\begin{cases} \mathbf{0} & \boldsymbol{si} \quad \boldsymbol{x < 0} \\ \dfrac{\mathbf{2}}{\mathbf{18}} & \boldsymbol{si} \quad \boldsymbol{0 \leq x < 1} \\ \dfrac{\mathbf{10}}{\mathbf{18}} & \boldsymbol{si} \quad \boldsymbol{1 \leq x < 2} \\ \dfrac{\mathbf{13}}{\mathbf{18}} & \boldsymbol{si} \quad \boldsymbol{2 \leq x < 3} \\ \dfrac{\mathbf{16}}{\mathbf{18}} & \boldsymbol{si} \quad \boldsymbol{3 \leq x < 5} \\ \mathbf{1} & \boldsymbol{si} \quad \boldsymbol{x \geq 5} \end{cases}$$

Graphe de F :



1- D'après le graphe F est une fonction de répartition car :

a-

F est croissante

F est continue à droite en tout point de $\mathbb{R}$

$$\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0 \qquad et \qquad \lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$$

F est une fonction de répartition discrète car elle est en escalier (voir le Graphe)
$X(\Omega) = \{0, 1, 2,3, 5\}$

b- La loi de X :

$$P(X = a) = F_X(a) - F_X(a^-)$$

$\boldsymbol{x}$	**0**	**1**	**2**	**3**	**5**
$\boldsymbol{P(X = x)}$	**2/18**	**8/18**	**3/18**	**3/18**	**2/18**

c-

$$P(-1 < X < 4) = F_X(4^-) - F_X(-1) = \frac{16}{18} - 0 = \frac{16}{18}$$

$$= P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)$$

$$P\left(X \geq \frac{1}{2}\right) = 1 - P\left(X < \frac{1}{2}\right) = 1 - F\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}^{-}\right) = 1 - \frac{2}{18} = \frac{16}{18}$$

$$= 1 - P(X = 0)$$

$$= P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 5)$$

2- $Y = 2X^2 + 1$ $\qquad X(\Omega) = \{0, 1, 2,3, 5\}$

a- $\boldsymbol{Y(\Omega) = \{\, 1, 3, 9, 19, 51\}}$

$\boldsymbol{x}$	**0**	**1**	**2**	**3**	**5**
$\boldsymbol{y}$	**1**	**3**	**9**	**19**	**51**

Y est une v.a. discrète car $\boldsymbol{Y(\Omega)}$ **est fini.**

b-

$\boldsymbol{x}$	**0**	**1**	**2**	**3**	**5**
$\boldsymbol{y}$	**1**	**3**	**9**	**19**	**51**
$\boldsymbol{P(Y = y)}$	**2/18**	**8/18**	**3/18**	**3/18**	**2/18**

c- La fonction de répartition de Y :

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & si \quad y < 1 \\ \frac{2}{18} & si \quad 1 \leq y < 3 \\ \frac{10}{18} & si \quad 3 \leq y < 9 \\ \frac{13}{18} & si \quad 9 \leq y < 19 \\ \frac{16}{18} & si \quad 19 \leq y < 51 \\ 1 & si \quad y \geq 51 \end{cases}$$

d- $F_Y(3{,}5) = 10/18$

$F_Y(1{,}2) = 2/18$

$$P(2 \leq Y \leq 15) = F_Y(15) - F_Y(2^-) = \frac{13}{18} - \frac{2}{18} = \frac{11}{18}$$

Solution de l'exercice 1.15.3

$$p = Proba\ qu'1\ personne\ ayant\ réservé\ ne\ vienne\ pas = 0.2 = 20\%$$

$$q = Proba\ qu'1\ personne\ ayant\ réservé\ \ et\ vienne = 0.8 = 80\%$$

$$X\text{: } nbre\ de\ personne\ ayant\ réservé\ et\ viennent\ parmi\ les\ 52$$

$$X \leadsto B(52, 0.8\ )$$

$$P(X = k) = C_{52}^{k}(0.8)^{k}(0.2)^{52-k}$$

La Probabilité de se trouver dans une situation embarrassante =

$P(X > 50) = P(X = 51) + P(X = 52) = 1 - P(X \leq 50) = 1.28 \times 10^{-4}$

Maintenant dans le cas où :

$$X \leadsto B(52, 0.2\ )$$

$$P(X = k) = C_{52}^{k}(0.2)^{k}(0.8)^{52-k}$$

$$X\text{: } nbre\ de\ personne\ ayant\ réservé\ et\ ne\ viennent\ pas\ parmi\ les\ 52$$

La Probabilité de se trouver dans une situation embarrassante =

$$P(X = 1) + P(X = 0) = 1.28 \times 10^{-4}$$

Solution de l'exercice 1.15.4 X : nombre de pièces **défectueuses** parmi les 20 tirées

$\boldsymbol{N = 500}$, $\boldsymbol{N_1 = 5}$, $\boldsymbol{N_2 = 495}$, $\boldsymbol{n = 20}$, $\boldsymbol{p = \frac{5}{500} = \frac{N_1}{N}}$

$$X(\Omega) = \{0,1, \dots .,5\} = \{\max(0, n - N_2 = 0)\ , \min(n, N_1) = 5\ \}$$

$$\boldsymbol{X \leadsto H(N, n, p) = H(500, 20, \frac{5}{500})}$$

$$P(X = k) = \frac{C_5^k C_{495}^{20-k}}{C_{500}^{20}}$$

$$\boldsymbol{P(X = 0) = \frac{C_5^0 C_{495}^{20-0}}{C_{500}^{20}} = \frac{C_{495}^{20}}{C_{500}^{20}} = 0,81}$$

$$E(X) = np = 20.\frac{5}{500} = 0,2$$

$V(X) = npq\dfrac{N-n}{N-1} = \dfrac{500-20}{499}20.\dfrac{5}{500}.\dfrac{495}{500} = 0,19$

1- Si les tirages se font avec remise ;
   X : Nombre de pièces défectueuses parmi les 20 tirées

$$X \leadsto B\left(20, \frac{5}{500}\right), \qquad X(\Omega) = \{0,1,2,3, \dots \dots .,20\}$$

$$P(X = 0) = C_{20}^{0}\left(\frac{5}{500}\right)^{0}\left(1 - \frac{5}{500}\right)^{20} = 0,81$$

Solution de l'exercice 1.15.5 On tire 3 boules à la fois donc $|\Omega| = C_{11}^3 = 165\ cas\ possibles$

- Soit on à 3 boules de même couleur :

$$\{BBB, NNN, RRR\}$$

$$+3\ ,\quad 0\ ,\quad -3$$

-Soit 2 de la même couleur :

$$\{BBR, BBN, NNB, NNR, RRB, RRN\}$$

$$+1\quad +2\quad +1\quad -1\quad -1\quad -2$$

- soit les 3 de couleurs différentes : BRN qui correspond à la valeur X= 0

On conclut que

1- $X(\Omega) = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

$$P(X = -3) = P(RRR) = \frac{C_3^3}{C_{11}^3} = \frac{1}{165}$$

$$P(X = -2) = P(RRN) = \frac{C_3^2 C_5^1}{C_{11}^3} = \frac{15}{165}$$

$$P(X = -1) = P(NNR, RRB) = \frac{C_5^2 C_3^1 + C_3^2 C_3^1}{C_{11}^3} = \frac{39}{165}$$

$$P(X = 0) = P(NBR, NNN) = \frac{C_5^3}{C_{11}^3} + \frac{C_3^1 C_3^1 C_5^1}{C_{11}^3} = \frac{55}{165}$$

$$P(X = 1) = P(NNB, BBR) = \frac{C_5^2 C_3^1}{C_{11}^3} + \frac{C_3^2 C_3^1}{C_{11}^3} = \frac{39}{165}$$

$$P(X = 2) = P(BBN) = \frac{C_3^2 C_5^1}{C_{11}^3} = \frac{15}{165}$$

$$P(X = 3) = P(BBB) = \frac{1 = C_3^3}{165}$$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$P(X = x)$	1/165	15/165	39/165	55/165	39/165	15/165	1/165

2- $E(X) = 0$, $E(X^2) = \frac{216}{165}$ $et\ V(X) = E(X^2) = 1.30$

3- $Y = X^2$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3

$Y=x^2$	9	4	1	0	1	4	9

1- $Y(\Omega)=\{0,1,4,9\}$

y	0	1	4	9
$P(Y=y)$	55/165	78/165	30/165	2/165

Pour calculer $E(Y)$ on peut utiliser 2 méthodes :

a- $E(Y)=\sum_{y\in Y(\Omega)} P(Y=y)=0.\left(\frac{55}{165}\right)+1.\left(\frac{78}{165}\right)+4.\left(\frac{30}{165}\right)+9.\left(\frac{2}{165}\right)=1.30$

b- $E(Y)=E(X^2)=\sum_{x\in X(\Omega)} x^2.P(X=x)=1.30$

Solution de l'exercice 1.15.6 $n=5\,,\;\; p=0{,}25=\text{Proba d'avoir une pomme défectueuse}$

$$X:le\ nombre\ de\ pommes\ défectueuses$$

$X \;\sim B(5\,,\;0.25)\;\;,$

$$X(\Omega)=\{0,1,2,3,4,5\}$$

$$P(X=k)=C_5^k(0{,}25)^k(0{,}75)^{5-k}$$

1- $P(X\geq 2)=1-\boldsymbol{P(X<2)}=1-(\boldsymbol{P(X=0)}+\boldsymbol{P(X=1)})=0.37$

$$=1-C_5^0(0{,}25)^0(0{,}75)^{5-0}-C_5^1(0{,}25)^1(0{,}75)^{5-1}=0.37$$

Solution de l'exercice 1.15.6 $\quad X\sim B(20,0.2)\quad,$

$$X(\Omega)=\{0,1,2,\dots\dots..,20\}$$

$$P(X=k)=C_{20}^k(0{,}2)^k(0{,}8)^{20-k}$$

$$E(X)=4,\quad V(X)=\;\;3{,}2$$

1- $P(5\leq X\leq 7)=P(X=5)+P(X=6)+P(X=7)=0{,}338$
2- On cherche n tel que : $P(X\geq 1)\geq 0{,}995$

$$1-P(X=0)=1-C_n^0(0{,}2)^0(0{,}8)^{n-0}\geq 0{,}995$$

$$1-0{,}995\geq 0{,}8^n$$

$$0{,}8^n\leq 0{,}005$$

$$n\,ln(0{,}8)\leq \ln(0{,}005)$$

$$n\geq\frac{\ln(0{,}005)}{\ln(0{,}8)}=\mathbf{23{,}74}$$

Donc il faut prélever au moins 24 sacs.

Solution de l'exercice 1.15.7

$X=nombre\ de\ pièces\ déféctueuses\ parmi\ les\ 1000$

$$p = proba\ d'avoir\ une\ pièce\ déféctueuses = \frac{2}{500} = 0.004$$

$$X \rightsquigarrow B\left(1000, \frac{2}{500}\right), \qquad X(\Omega) = \{0,1,2,3, \ldots\ldots, 1000\}$$

a- $P(X = 0) = C_{1000}^{0}\left(\frac{2}{500}\right)^{0}\left(1 - \frac{2}{500}\right)^{1000} = 0.018.$

b- $P(X \leq 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = 0.433.$

c- $P(X > 4) = 1 - P(X \leq 4) = 1 - 0.628 = 0.371.$

2ème manière :

Comme $n \geq 30\ \ et\ p\ \leq 0.1\ et\ np \leq 15$ alors on peut approximer la loi binomiale par la loi de Poisson $\mathcal{P}(np) = \mathcal{P}(4)$

$$P(X = k) = \frac{e^{-4}4^{k}}{k!}$$

a- $P(X = 0) = 0.018$

b- $P(X \leq 3) = 0.433$

c- $P(X > 4) = 1 - P(X \leq 4) = 1 - 0.62 = 0.371$

Solution de l'exercice 1.15.8

$X =$ Nombre de téléphones tombés en panne dans les 10 premières années

En supposant les années indépendantes

$$X \rightsquigarrow B(10, p)$$

$$P(X = k) = C_{10}^{k}p^{k}(1 - p)^{10-k} \quad , \quad k = 0,1, \quad \ldots, 10$$

1- $P(X = 5) = C_{10}^{5}p^{5}(1 - p)^{5}$

2- $E(X) = 10p = np \qquad et\ V(X) = 10p(1 - p) = np(1 - p)$

3- Y: $les\ dépenses\ en\ téléphonie\ s'il\ ne\ s'assure\ jamais\ les\ \mathbf{10}\ premières\ années$

$$Y = 10.000 * 10 + 5000X = \mathbf{100.000 + 5000X}$$

$$Y(\Omega) = \{100.000, 105.000, 110.000, 115.000, \ldots\ldots\ldots\ldots, 150.000\}$$

$$Y\ et\ X\ ont\ la\ même\ loi$$

$$P\big(Y = 100\,000 + 5000k\big) = P(X = k) = C_{10}^{k}p^{k}(1 - p)^{10-k}, \qquad k \in\ Y(\Omega)$$

4- Les dépenses s'il **assure** tous ses téléphones sont : $10\,000 * 10 + 1000 * 10 = \mathbf{110\ 000}\ DA$.

5- Il est préférable d'assurer ses téléphones si le montant moyen des dépenses en téléphonies sans assurances est supérieur au montant avec assurances,

$$E(Y) \geq 110.000$$

$$E(\boldsymbol{Y}) = E(\mathbf{100.000 + 5000}\boldsymbol{X}) = 100.000 + 5000 * E(X) = 100.000 + 5000 * 10p$$

$$100.000 + 50000p \geq 110.000 \Leftrightarrow 50000p \geq 10.000 \Leftrightarrow p \geq 0.2$$

6- $Z = l'année\ pendant\ laquelle\ l'étudiant\ subit\ sa\ première\ panne$

$$Z \leadsto \mathrm{G(p)}$$

$$P(Z = k) = p(1-p)^{k-1} \qquad k \in \mathbb{N}^*$$

7- $P(Z = 3) = p(1-p)^2$

Solution de l'exercice 1.15.9

$$G_X^{(1)}(1) = E(X)$$

$$G_X^{(1)}(t) = \frac{1}{4}.2(1+t)$$

$$\boxed{G_X^{(1)}(1) = 1 = E(X)}$$

$$G_X^{(2)}(t) = \frac{1}{2} \Longrightarrow \boldsymbol{G_X^{(2)}(1) = \frac{1}{2}}$$

$$E(X^2) = G_X^{(2)}(1) + E(X) = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$$

$$V(X) = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2 = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$$

1- La loi de X

1ère méthode :

$$G_X(t) = \frac{1}{4}(1+t)^2$$

$$P(X = k) = \frac{G_X^{(k)}(0)}{k!} \ , \ \forall k \geq 0$$

$$P(X = 0) = G_X(0) = \frac{1}{4} \ , \ 0! = 1$$

$$\mathrm{P(X = 1)} = \frac{\mathrm{G_X^{(1)}(0)}}{1!} = \frac{1}{2}$$

$$P(X = 2) = \frac{G_X^{(2)}(0)}{2!} = \frac{1}{4}$$

$$P(X = 3) = 0$$

k	0	1	2
$P(X=k)$	1/4	1/2	1/4

2ème méthode :

$$G_X(t)=\frac{1}{4}(1+t)^2$$

$G_X(t)=\sum_{k=0}^{\infty}t^kP(X=k)=P(X=0)+tP(X=1)+t^2P(X=2)+t^3P(X=3)+\cdots..$

$$=\frac{1}{4}(1+t)^2=\frac{1}{4}(1+2t+t^2)=\frac{1}{4}t^0+\frac{1}{2}t^1+\frac{1}{4}t^2$$

Par identification on trouve : $P(X=0)=\frac{1}{4}$, $P(X=1)=\frac{1}{2}$, $P(X=2)=\frac{1}{4}$

Chapitre 2

2 Variables Aléatoires continues

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

2.1 Définition Une variable aléatoire *X*

$$X: \mathbf{\Omega} \longrightarrow \boldsymbol{D} \subset \mathbb{R}$$

X est dite variable aléatoire continue si son support ***D*** est un intervalle ou bien une réunion d'intervalles.

Exemple Si on désigne par X : "la durée de vie d'une ampoule"

Il est clair que le support de X est **D** = $]0; +\infty[$; donc X est une variable absolument continue.

2.2 Densité de probabilité

Les variables aléatoires continues peuvent prendre une infinité de valeurs réelles. Si on peut calculer la dérivée de la fonction de répartition F_X il est possible de définir une nouvelle fonction $f(x)$ appelée densité de probabilité.

2.2.1 Définition

On appelle $\boldsymbol{f(x)}$ densité de probabilité de la v.a **X** si elle vérifie les propriétés suivantes :

1- $f_X(x) \geq 0, \quad \forall\, x \in R$

2- $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\mathrm{dx} = 1$ (intégrale sur son domaine de définition)

Remarque 2.2.1 La probabilité de l'évènement $(a \leq X \leq b)$ *est donnée par* :

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$

Exemple

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & si \quad x \in [a, b] \\ 0 & sinon \end{cases}$$

est une densité de probabilité en effet :

1- Non négativité

$$\forall x \in [a, b] \ , f(x) = \frac{1}{b-a}.$$

$$puisque\ b > a\ , b - a\ est\ positif.donc\ \frac{1}{b-a}\ est\ également\ positif$$

2- Intégral égale à 1

$$\int_a^b \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b dx = \frac{b-a}{b-a} = 1$$

Par conséquent $f(x)$ est une densité de probabilité.

2.3 Fonction de répartition

2.3.1 Définition

Soit $\boldsymbol{X}$ une v.a.continue de densité $\boldsymbol{f(x)}$ sur $(\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\mathcal{F}}, \boldsymbol{P})$. On appelle fonction de répartition de X, la fonction $F_X: \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$ définit par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

Exemple

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & si \quad x \in [a,b] \\ 0 & sinon \end{cases}$$

Sa fonction de répartition est définie par :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & si\ x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & si\ \ a \leq x \leq b \\ 1 & si \quad x \geq b \end{cases}$$

En effet :

1[er] Cas : $x < a$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} 0\ dt = 0$$

2[ème] Cas : $a \leq x < b$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{a} 0\ dt\ + \int_a^b \frac{1}{b-a} dt = \frac{x-a}{b-a}$$

3[ème] Cas : $x \geq b$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{a} 0\ dt\ + \int_a^b \frac{1}{b-a} dt + \int_b^x 0\, dt = 1$$

Finalement :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & si \quad a \leq x < b \\ 1 & si \quad x \geq b \end{cases}$$

Remarque 2.3.1 Pour une variable aléatoire continue X, la fonction de répartition $F(x)$ est définie de façon semblable à celle d'une variable aléatoire discrète et jouit de propriétés assez similaires. Cependant il ne s'agit plus d'une fonction en escalier mais d'une fonction continue.

- La fonction de répartition F est continue (à droite et à gauche) et admet une dérivée à droite et une dérivée à gauche (pas forcément dérivable).
- $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \quad , \quad F'_X(x) = f_X(x)$

2.4 Probabilité attachée à un intervalle

Soit $\boldsymbol{X}$ une v .a. et $\boldsymbol{F_X(x)}$ sa fonction de répartition. $\forall\, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R},\ \boldsymbol{a} < \boldsymbol{b}, \boldsymbol{on\ a}$:

- $P(a < x \leq b) = P(a \leq x < b) = P(a < x < b) = P(a \leq x \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$
- $\forall\, a \in \mathbb{R}, \quad \boldsymbol{P(X = a) = 0} \quad car\ F\ est\ continue$
- *Pour une v.a. continue, étant donné que* $F(x) = P(X \leq x) = P(X < x)$ *ces deux définitions sont équivalentes dans le cas continu, mais pas dans le cas discret.*

2.5 Moment d'ordre, Espérance mathématique et Variance d'une variable aléatoire continue

Soit X une variable aléatoire continue de densité f_X , on appelle sous réserve de

convergence des intégrales concernées ;

1- Espérance de X le nombre :$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$

2- Moment d'ordre n ($n \in \mathbb{N}^*$), le nombre $E(X^n) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n f(x)dx$

3- La variance de, le nombre : $E\big(X - E(X)\big)^2 = E(X^2) - [E(X)]^2$

Exemple

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)} \ , \qquad x \in \mathbb{R}$$

Alors la variable aléatoire X n'admet pas un moment d'ordre 1(une espérance)

En effet :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \frac{1}{\pi}\left[-\int_{-\infty}^{0} \frac{x}{1+x^2}dx + \int_{0}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}dx\right]$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}dx = \frac{1}{\pi}Ln(1+x^2)|_0^{\infty} = +\infty$$

2.6 Transformation d'une variable aléatoire continue

2.6.1 **Définition** Soit $\boldsymbol{X}$ une variable aléatoire continue dont la densité est donnée par $\boldsymbol{f_X}$.

Si g est une fonction continue strictement monotone (croissante ou décroissante) et dérivable, alors la densité de la variable aléatoire $Y = g(X)$ est donnée par :

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X(g^{-1}(y)) \left|\frac{d}{dy} g^{-1}(y)\right| & s'il existe\ x\ telle\ que\ y = g(x) \\ 0 & sinon \end{cases}$$

ou

g^{-1} est la fonction inverse de g.

Si X est une variable aléatoire continue et que $Y = g(X)$ est une fonction de X, alors Y est lui-même une variable aléatoire. Nous devrions donc être en mesure de trouver la fonction de répartition et la densité de Y. Il est généralement plus simple de partir de la fonction de répartition, puis de trouver la densité en prenant la dérivée de la fonction de répartition.

Exemple

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}x^2 & si \quad -1 < x < 1 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

La loi de $\boldsymbol{Y = X^2}$

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(X^2 \le y) = P\left(|X| \le \sqrt{y}\right) = P\left(-\sqrt{y} \le X \le \sqrt{y}\right)$$
$$= F_X\left(\sqrt{y}\right) - F_X\left(-\sqrt{y}\right)$$

$$f(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} f_X\left(\sqrt{y}\right) + \frac{1}{2\sqrt{y}} f_X\left(-\sqrt{y}\right)$$

$$f(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}.\frac{3}{2}.y + \frac{1}{2\sqrt{y}}.\frac{3}{2}.y = 2.\frac{1}{2\sqrt{y}}.\frac{3}{2}.y = \frac{3}{2}\sqrt{y} \qquad 0 < y < 1$$

$$f(y) = \frac{3}{2}\sqrt{y} \qquad 0 < y < 1$$

2.7 Lois continues usuelles

Soit X une variable aléatoire continue de densité f et de fonction de répartition F

2.7.1 Loi continue Uniforme

Lorsque la fonction de densité de probabilité est constante sur un intervalle $[a,b]$ est nulle partout ailleurs, on parlera de loi uniforme de paramètres a et b, ce que l'on note :

$$X \leadsto U_{[a,b]}$$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & si \quad x \in [a,b] \\ 0 & sinon \end{cases}$$

$$E(X) = \frac{a+b}{2} \qquad et \qquad V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & si\ x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & si\ \ a \le x \le b \\ 1 \quad si & x \ge b \end{cases}$$

En effet

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

1er Cas : $x < a$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} 0\ dt = 0$$

2ème Cas : $a \le x < b$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{a} 0\ dt\ + \int_{a}^{b} \frac{1}{b-a} dt = \frac{x-a}{b-a}$$

3ème Cas : $x \ge b$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{a} 0\ dt\ + \int_{a}^{b} \frac{1}{b-a} dt + \int_{b}^{x} 0\, dt = 1$$

Finalement :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & si \quad a \le x < b \\ 1 & si \quad x \ge b \end{cases}$$

Exemple

Si $X \leadsto U_{[0,1]}$, $\quad f(x) = \begin{cases} 1\ \ si \quad x \in [0,1] \\ 0 \qquad\quad sinon \end{cases}$, $F(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < 0 \\ x & si \quad 0 \le x < 1 \\ 1 & si \quad x \ge 1 \end{cases}$,

$$E(X) = \frac{1}{2} \; et \; V(X) = \frac{1}{12}$$

2.7.2 Loi Gamma On dit que $\boldsymbol{X}$ suit la loi Gamma de paramètres $\boldsymbol{a, b > 0}$ $\boldsymbol{si}$:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-bx}x^{a-1}b^{a}}{\Gamma(a)} & si \quad x \geq 0 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

$$\Gamma(a): la\ fonction\ gamma\ définie\ par: \ \Gamma(a) = \int_{0}^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}dx \quad , \quad a > 0,$$

$$\Gamma(a): la\ fonction\ gamma\ possède\ les\ propriètés\ suivantes:$$

$$\Gamma(1) = 1$$

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

Et on note :

$X \sim \gamma(a, b)$ avec $E(X) = \frac{a}{b}$ et $V(X) = \frac{a}{b^2}$

Calcul de $\boldsymbol{E(X)}$ et $\boldsymbol{V(X)}$

$$E(X) = \int_{0}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{0}^{+\infty} \frac{e^{-bx}x^{a}b^{a}}{\Gamma(a)}dx = \frac{b^{a}}{\Gamma(a)}\int_{0}^{+\infty} x^{a+1-1}\,e^{-bx}dx =$$

$$= \frac{b^{a}}{\Gamma(a)}\frac{\Gamma(a+1)}{b^{a+1}} = \frac{a\Gamma(a)}{\Gamma(a).b} = \frac{a}{b}$$

$$E(X^2) = \int_{0}^{+\infty} x^2 f(x)dx = \frac{b^{a}}{\Gamma(a)}\int_{0}^{+\infty} x^{a+1}\,e^{-bx}dx = \frac{b^{a}}{\Gamma(a)}\frac{\Gamma(a+2)}{b^{a+2}} =$$

$$= \frac{b^{a}}{\Gamma(a)}\frac{(\mathrm{a}+1)\Gamma(a+1)}{b^{a+2}} = \frac{a(a+1)}{b^2}$$

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{a(a+1)}{b^2} - \frac{a^2}{b^2} = \frac{a}{b^2}$$

2.7.3 Loi exponentielle soit $\boldsymbol{X}$ une $\boldsymbol{v.a.continue}$ de fonction densité de loi Gamma de paramètres $\boldsymbol{a, b > 0}$

$$si\ a = 1$$

On obtient la loi Exponentielle de paramètre b.

$$f(x) = be^{-bx}\ ,\ \ x > 0, \qquad b > 0$$

Et on note :

$$X \leadsto Exp(b) = \gamma(1, b)$$

$$E(X) = \frac{1}{b}\ , \qquad E(X^2) = \frac{2}{b^2}\ ,\ \ V(X) = \frac{1}{b^2}$$

Remarque $X \leadsto Exp(\lambda) \Leftrightarrow X \leadsto \gamma(1, \lambda)$

Montrer que $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$?

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}\ ,\ \ x \geq 0$$

si : $x < 0$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} 0\ dt = 0$$

si : $x \geq 0$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{0} 0\ dt\ + \int_{0}^{x} \lambda e^{-\lambda t} dt = \lambda \left[\frac{-1}{\lambda} e^{-\lambda t}\right]_0^x = 1 - e^{-\lambda x}$$

2.7.4 La Loi Khi-deux

Soit $\boldsymbol{X}$ une $\boldsymbol{v.a.continue}$ de fonction densité de loi Gamma de paramètres $\boldsymbol{a, b > 0}$

$$si\ a = \frac{n}{2}\ et\ b = \frac{1}{2}$$

On obtient la loi de Khi-deux à n degrés de liberté.

Et on note :

$$X \leadsto \chi_n^2 = \gamma\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right) \quad n \in \mathbb{N}^*$$

$$E(X) = \frac{\frac{n}{2}}{\frac{1}{2}} = n \qquad , V(X) = \frac{\frac{n}{2}}{\frac{1}{4}} = 2n$$

2.7.5 La loi Normale

On dit que X suit la loi normale de paramètres m, σ^2 $(m \in \mathbb{R}, \sigma > 0)$ si sa fonction densité s'écrit sous la forme :

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$et\ on\ note: X \leadsto N(m, \sigma^2)$$

$$avec \quad m = E(X) \quad et\ V(X) = \sigma^2$$

Si m=0 et $\sigma^2 = 1$ *alors :X*$\rightsquigarrow N(0,1)$ *et on dit alors que X suit la loi normale centrée réduite de densité :*

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad , x \in \mathbb{R}$$

Et de fonction de répartition $\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

2.7.5.1 Propriétés de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite

$$\Phi(0) = \frac{1}{2}$$

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$$

Remarque $\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ n'est pas calculable par les méthodes classiques d'intégration, son calcul est établi par des méthodes numériques d'approximations, une table de cette intégrale est fournie pour des valeurs x dite ***Table de la Loi Normale***

2.7.5.2 Lecture de la Table de la Loi Normale

Voici comment se présente une table de loi $N(0,1)$. On lit dans la table de loi ci-dessous les différentes valeurs que peut prendre $P(X \leq x)$ lorsque x est positif.

Les **différentes colonnes** vont nous permettre de trouver **le chiffre des centièmes de la valeur de** x que l'on recherche, en s'incrémentant d'un centième par colonne. Les **différentes lignes** vont nous permettre de trouver **les chiffres des dixièmes et des unités pour la valeur de** x que l'on recherche, en s'incrémentant d'un dixième par ligne.

Prenons un exemple concret :

$$\boldsymbol{Je\ cherche\ P(X \leq 3,14)} = \Phi(3.14)$$

On commence par décomposer 3,14 entre unités et dixièmes d'un côté et centièmes de l'autre : 3,14

On se réfère ensuite à la table de loi en regardant les unités et les dixièmes dans les lignes et les centièmes dans les colonnes.

$$Au\ final, on\ voit\ donc\ que\ \boldsymbol{P(X \leq 3,14) = 0,9992.}$$

Chiffre des centièmes

Chiffre des unités et des dixièmes

	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7703	0.7734	0.7764	0.7793	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8906	0.8925	0.8943	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9986	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

2.7.5.3 Propriété

$$si\ \ X \backsim N(m,\sigma^2) \qquad alors \quad Y = \frac{X-m}{\sigma} \backsim N(0,1)$$

Démonstration

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P\left(\frac{X-m}{\sigma} \le y\right) = P(X \le \sigma Y + m) = F_X(\sigma Y + m)$$

$$f_Y(y) = \sigma f_X(\sigma Y + m) = \sigma \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(\sigma Y + m - m)^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} \ , y \in \mathbb{R}$$

$$Y \backsim N(0,1)$$

2.8 Approximation de la loi Binomiale par la loi Normale

Soit X une variable aléatoire de loi Binomiale de paramètres $\boldsymbol{n}, \boldsymbol{p}$.

Si $n \ge 30$ **et** $np \ge 5$ **et** $n(1-p) \ge 5$ alors on peut approcher la loi Binomiale par la loi Normale et on écrit :

$$B(n,p) \xrightarrow[n \ge 30\ et\ np \ge 5\ et\ n(1-p) \ge 5]{} N(np, np(1-p)$$

Dans la pratique, comme l'approximation faite est une approximation d'une loi discrète par une loi continue. Nous devons effectuer ***une correction de continuité****, c'est-à-dire qu'à la valeur* $\boldsymbol{x_0}$ *d'une valeur discrète, nous associerons l'intervalle* $[x_0 - 0.5; x_0 + 0.5]$ *pour la variable continue.*

2.9 Inégalités intéressantes

2.9.1 Inégalité de Markov

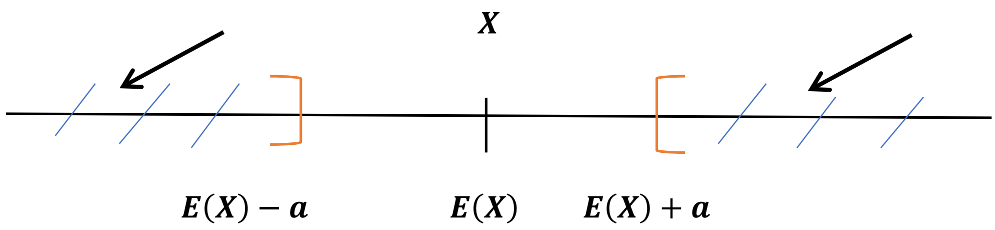
Soit $\boldsymbol{X}$ une v.a. réelle positive ou nulle d'espérance $\boldsymbol{E(X)}$ alors, pour tout réel a strictement positive,

$$\boldsymbol{P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}}$$

2.9.2 Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

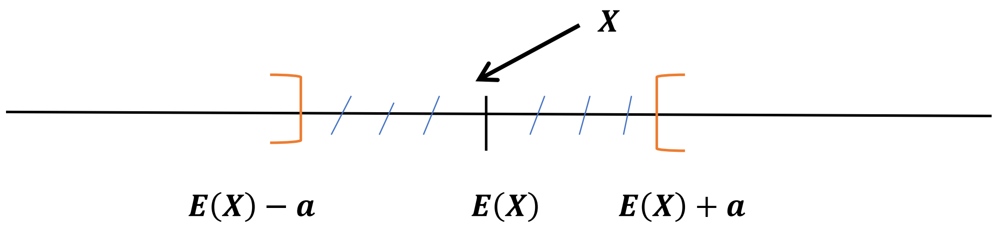
Théorème 2.9.1 Soit $\boldsymbol{X}$ une v.a.d'espérance $\boldsymbol{E(X)}$ et de variance $V(X)$. Alors pour tout réel a strictement positive,

$$\boldsymbol{P(|X - E(X) \geq a|) \leq \frac{V(X)}{a^2}} \quad (\boldsymbol{Majoration})$$



Une autre manière d'écrire cette inégalité :

$$\boldsymbol{P(|X - E(X) < a|) \geq 1 - \frac{V(X)}{a^2}} \quad (\boldsymbol{Minoration})$$



Remarque

- Plus V(X) augmente plus les valeurs se dispersent autour de la moyenne.
- $Si \quad V(X) = 0 \Rightarrow X = Cte$
- Plus a **augmente** plus $\frac{V(X)}{a^2}$ **diminue** $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{si\ a \to \infty \Rightarrow \frac{V(X)}{a^2} \longrightarrow 0}$
- $P(|X - E(X)| \geq 2\sigma) \leq 25\ \%$
- Utilité de Tchebychev en théorie : Démonstration de la loi des grands nombres

Démonstration

$$P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$$

Cette inégalité peut s'écrire avec des notations différentes :

$$P(Y \geq a^2) \leq \frac{E(Y)}{a^2}$$

Supposons que $Y = (X - E(X))^2$ l'inégalité s'écrit alors :

$$P\left(\left(X - E(X)\right)^2 \geq a^2\right) \leq \frac{E\left(\left(X - E(X)\right)^2\right)}{a^2} = \frac{V(X)}{a^2}$$

Puisque a est positive

$$P(|X - E(X)| \geq a) \leq \frac{V(X)}{a^2}$$

En considérant l'évènement complémentaire de : $|X - E(X)| \geq a$

Il vient : $P(|X - E(X) < a|) \geq 1 - \frac{V(X)}{a^2}$

Exemple la fabrication quotidienne de téléphones est modélisé par une variable aléatoire de moyenne $m = 50$.

1) Estimer la probabilité que la production dépasse les 75 téléphones pour une journée donnée.
2) On sait de plus que $V(X) = 25$. Donner une estimation que la production d'un jour soit comprise entre 40 et 60.

Solution

1) $P(X > 75) \leq \frac{50}{75} = \frac{2}{3}$
2) $P(40 \leq X \leq 60) = P[|X - 50| \leq 10] \geq 1 - \frac{25}{100} = 0.75$

Tchebychev s'applique à n'importe quelle loi.

2.10 La fonction Génératrice des moments

2.10.1 Définition Soit X une variable aléatoire (discrète ou continue) on appelle fonction génératrice des moments $M_X(t)$, donnée par :

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \sum_{x \in X(\Omega)} e^{tx} P(X = x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f_X(x) dx$$

Le moment d'ordre n de la variable aléatoire X est donnée par :$E(X^n) = M_X^{(n)}(0)$

$$M_X^{(n)}(0): est\ la\ dérivée\ d'ordre\ \ n\ \ de\ M_X$$

Exemple $\mathbf{X} \sim \boldsymbol{U}_{[0,1]}$

$$M_X(t) = \int_0^1 e^{tx}dx = \left[\frac{1}{t}e^{tx}\right]_0^1 = \frac{1}{t}(e^t - 1)$$

$\mathbf{X} \sim \mathbf{Exp(a)}$

$$M_X(t) = \int_0^{+\infty} e^{tx}ae^{-ax}dx = a\int_0^{+\infty} e^{-x(a-t)}dx = \frac{a}{t-a}\left[e^{-x(a-t)}\right]_0^{+\infty} = \frac{a}{a-t}, a > t$$

$\mathbf{X} \sim \mathbf{N(0,1)}$

$$M_X(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx}e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(x^2-2tx)}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}[(x-t)^2-t^2]}dx =$$

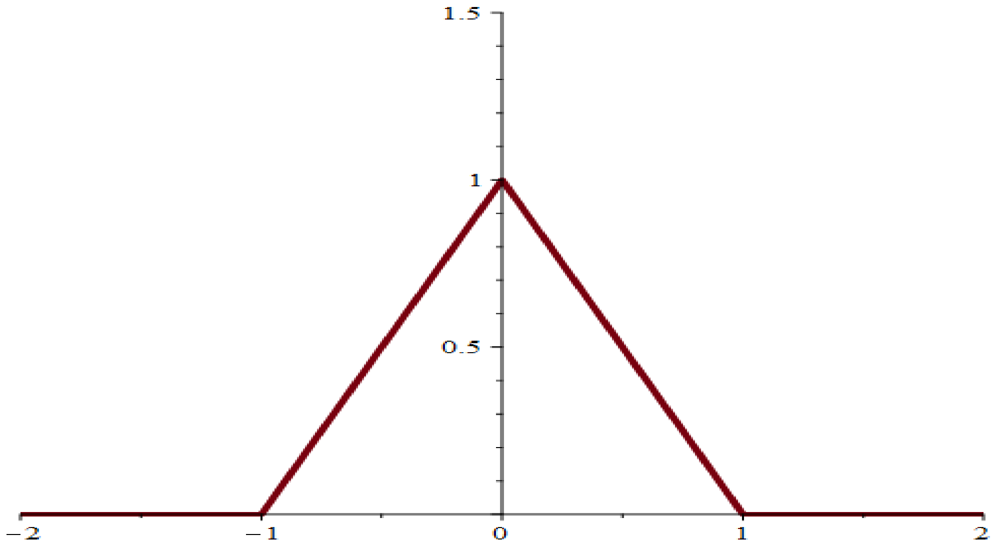
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{t^2}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(x-t)^2}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{t^2}{2}}.\sqrt{2\pi} = e^{\frac{t^2}{2}}.$$

2.11 Exercices

2.11.1 Exercice

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , x < -1 \; ou \; x \geq 1 \\ x+1 & , \quad -1 \leq x < 0 \\ -x+1 & , \quad 0 \leq x < 1 \end{cases}$$



1- Montrer que f est une densité de probabilité.
2- Soit X une variable aléatoire de densité f. Déterminer la fonction de répartition F de X
3- Déterminer $E(X)$ et $V(X)$.

2.11.2 Exercice Soit $\boldsymbol{X}$ une variable aléatoire admettant une densité sous la forme :

$$f(x)=\begin{cases}0 & si \quad x\leq 0\\ \frac{x}{3} & si \quad 0<x\leq 1\\ \frac{1}{3} & si \quad 1<x\leq 2\\ ke^{2-x} & si \quad x>2\end{cases}$$

1- Déterminer la valeur de k ?
2- Déterminer la fonction de répartition F_X ?
3- Calculer $P(X<x/X\geq 3/2)$, x est une réel quelconque.
4- Soit $Y=2-X$. Déterminer la loi de Y.

2.11.3 Exercice La durée de charge en heure d'une batterie $\boldsymbol{X}$ est une variable aléatoire de densité :

$$f(x)=\begin{cases}\frac{10}{x^2}, & x\geq 10\\ 0, & sinon\end{cases}$$

1- Quelle est la probabilité qu'une batterie ait une durée de charge supérieure à 20 heures?
2- Quelle est la fonction de répartition de X.
3- Supposons que nous avons 6 batteries et que les durées de charge des batteries soient indépendantes. Soit la variable aléatoire $\boldsymbol{Y}$ représentant le nombre de batteries dont la durée de charge est d'au moins 15 heures.
a- Quelle est la loi de Y ? Donner ses paramètres et son expression.
b- Quelle est la probabilité que parmi 6 batteries, au moins 3 d'entre elles aient une durée de charge d'au moins 15 heures ?
c- Calculer $E(Y)$.

2.11.4 Exercice On considère une variable aléatoire X dont la densité $\boldsymbol{f}$ est donnée par :

$$f(x)=\begin{cases}0 & si \;\; x<0\\ xe^{\frac{-x^2}{2}} & sinon\end{cases}$$

1- Déterminer la loi et l'espérance de la variable aléatoire $Y=X^2$.
2- On s'intéresse maintenant aux précipitations à une région donnée. On suppose que la durée (en heure) T entre deux précipitations vérifie la relation $T=\lambda Y$, ou λ est une constante. En consultant les relevés météo, on se rend compte qu'il s'écoule au moins 24hconsécutives sans pluie avec une probabilité 0,09.
a- Déterminer λ
b- Combien de temps s'écoule-il en moyenne entre deux averses.
c- Il est midi. La pluie vient de s'arrêter. Quelle est la probabilité qu'il pleuve avant 14h.

2.11.5 Exercice Un livreur a promis de passer chez un client entre 10 h et 11h. On suppose que la probabilité de son passage est uniformément répartie.
1- Quelle est la probabilité qu'il arrive avant 10h10 min ?
2- Quelle est la probabilité qu'il arrive entre 10h20 et 10h 40 ?

3- Sachant que le client a attendu le livreur 15 min. quelle est la probabilité qu'il arrive dans les dix prochaines minutes ?

2.11.6 Exercice

Soit $\boldsymbol{X}$ une variable réelle aléatoire continue modélisée par la loi uniforme ;

$$X \leadsto U[0,1].$$

1-Rappeler la fonction de densité de la variable étudiée.

2-On pose : $Y = -aLn\,X$; $(a > 0)$

a- Déterminer la fonction de densité de la variable Y, reconnaitre sa loi.
b- En déduire son espérance et sa variance.

3-Calculer la fonction répartition de la variable Y.

4-Calculer la probabilité suivante : $P(Y > 2a)$.

2.11.7 Exercice

La longueur des pièces produites par une machine de type A varie selon une loi normale d'espérance 8 mm et de variance 4 mm, et la longueur de celles produites par une machine de type B varie selon une loi normale avec espérance 7,5 mm et variance 1 mm.

1- Si vous voulez produire des pièces de longueur entre 7 et 9 mm, quel type de machine choisiriez-vous ?
2- Si la moyenne des longueurs produites par la machine **A** reste **8** mm, quelle doit être sa variance pour qu'elle ait la même performance que la machine **B** ?

2.11.8 Exercice

Un revendeur de matériel photographique estime qu'il pourra vendre 40 appareils photographiques par jour et les ventes sont indépendantes. Une étude lui a montré que, parmi les différentes marques disponibles, la marque A réalise 38,6% du marché.

On note $\boldsymbol{X}$ la variable aléatoire qui associe le nombre d'appareils de marque A vendus ce jour-là.

1- Donner la loi de $\boldsymbol{X}$**,** préciser les paramètres de cette loi.
2- Calculer la probabilité que sur 40 appareils vendus 20 soient de la marque A.
3- Calculer $E(X)$et l'écart-type de X.
4- Par quelle loi peut-on approcher la loi de X.
5- Donner une approximation de la probabilité de de l'évènement : « il y'a exactement 20 appareils de marque A vendus »
6- Déterminer une valeur approchée de la probabilité de l'évènement : « 20 au moins des appareils vendus sont de marque A.

2.11.9 Exercice

Une coopérative produit et commercialise des légumes. Un service étudie le problème de mise en bocal de tomates confites :le poids annoncé est de 485gr, et on décide qu'un bocal est mal rempli s'il pèse moins de 485 gr. On admet que la variable aléatoire X qui à chaque bocal, associe son poids en grammes, suit une loi normale d'espérance 500 et d'écart-type 12.

1- Calculer la probabilité qu'un bocal soit mal rempli.
2- Déterminer le réel h tel que $P(500-h \leq X \leq 500+h)=0.95$
3- Grace à une politique de qualité, on a ramené le pourcentage de bocaux mal remplis à 2%. Un contrôleur teste un lot de 200 bocaux prélevés sur la production (on assimile ce prélèvement à un tirage avec remise).On désigne par Z la v.a. désignant le nombre de bocaux mal remplis dans ce lot.

- Quelle est la loi de Z ?

- Peut-on approximer la loi de Z par une loi discrète usuelle ? Laquelle ?

2.11.10 Exercice

X $\leadsto$ B(20,0.3), $E(X)=6 \quad et\ V(X)=4.2$

- Majorer $P(|X-E(X)| \geq 5)$.
- Minorer $P(1<X<11)$ en utilisant l'inégalité de Tchebychev.
- Majorer $P(X>5)$.
- Calculer $P(|X-6| \geq 5)$ *avec la loi Binomiale*.

Solution de l'exercice 2.10.1

1- $f_X(x) \geq 0, \;\; \forall x \in \mathbb{R}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{-1} 0dx + \int_{-1}^{0}(x+1)dx + \int_{0}^{1}(-x+1)dx + \int_{1}^{+\infty} 0dx \;=$$

$$= \left[\frac{x^2}{2}+x\right]_{-1}^{0} + \left[-\frac{x^2}{2}+x\right]_{0}^{1} = -\left(\frac{1}{2}-1\right)+\left(-\frac{1}{2}+1\right) = \frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1$$

$$on\ \ conclut\ que\ f\ est\ une\ densité\ de\ probabilité$$

2- $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$

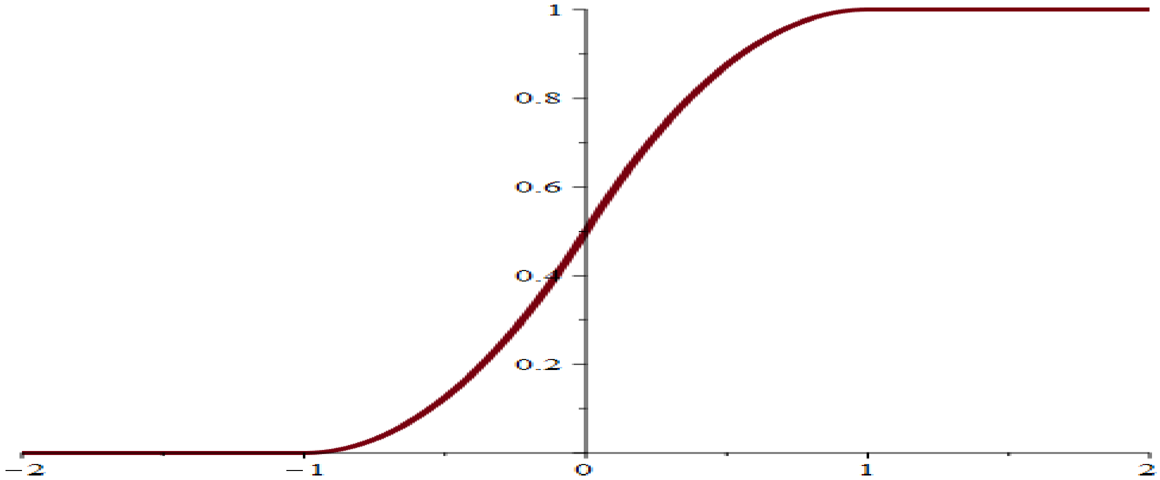
$si\ x < -1:\;\; F(x) = 0$

$si\ \ -1 \leq x < 0:\quad F(x) = \int_{-\infty}^{-1} 0dx + \int_{-1}^{x}(t+1)dt = \frac{x^2}{2}+x+\frac{1}{2}$

$$si\ \ 0 \leq x < 1:\quad F(x) = \int_{-\infty}^{-1} 0dx + \int_{-1}^{0}(t+1)dt + \int_{0}^{x}(-t+1)dx = \frac{-x^2}{2}+x+\frac{1}{2}$$

$si\ x \geq 1$: $F(x) = \int_{-\infty}^{-1} 0dx + \int_{-1}^{0}(t+1)dt + \int_{0}^{x}(-t+1)dt + \int_{1}^{+x} 0dt \ = 1$

$$\boldsymbol{F(x)} = \begin{cases} \mathbf{0} & \boldsymbol{si} \quad \boldsymbol{x < -1} \\ \dfrac{\boldsymbol{x^2}}{\mathbf{2}} + \boldsymbol{x} + \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} & \boldsymbol{si} \quad -\mathbf{1} \leq \boldsymbol{x} < \mathbf{0} \\ \dfrac{-\boldsymbol{x^2}}{\mathbf{2}} + \boldsymbol{x} + \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} & \boldsymbol{si} \quad \mathbf{0} \leq \boldsymbol{x} < \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \boldsymbol{si} \quad \boldsymbol{x} \geq \mathbf{1} \end{cases}$$



3- $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = 0$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx = \frac{1}{6} \ \ et \ \ V(X) = \frac{1}{6}$$

Solution de l'exercice 2.10.2

1- $k \ = \frac{1}{2}$

2- $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$

1er Cas : $x \leq 0$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} 0\ dt = 0$$

2ème Cas : $0 < x \leq 1$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{0} 0\ dt \ + 6\int_{0}^{x} \frac{t}{3} dt = \frac{x^2}{2}$$

3ème Cas : $1 < x \leq 2$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{0} 0\ dt \ + \int_{0}^{1} \frac{t}{3} dt + \int_{1}^{x} \frac{1}{3} dt = \frac{1}{6} + \frac{1}{3}(x-1)$$

4ème cas : $x > 2$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{0} 0\ dt \ + \int_{0}^{1} \frac{t}{3} dt + \int_{1}^{2} \frac{1}{3} dt + \int_{2}^{x} \frac{1}{2} e^{2-t} dt = 1 - \frac{1}{2} e^{2-x}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x \leq 0 \\ \dfrac{x^2}{6} & si \quad 0 < x \leq 1 \\ \dfrac{x}{3} - \dfrac{1}{6} & si \quad 1 < x \leq 2 \\ 1 - \dfrac{1}{2}e^{2-x} & si \quad x > 2 \end{cases}$$

3- $P(X < x/X \geq 3/2) = \frac{P\left(\frac{3}{2} \leq X < x\right)}{P(X \geq 3/2)} = \frac{F(x) - \frac{1}{3}}{1 - \frac{2}{3}} = \frac{3}{2}F(x) - \frac{1}{2}$

- Si $\frac{3}{2} < x \leq 2$, $F(x) = \frac{x}{2} - \frac{3}{4}$
- Si $x > 2$, $F(x) = 1 - \frac{3}{4}e^{2-x}$

4- la loi de $Y = 2 - X$

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(2 - X \leq y) = P(X \geq 2 - y) = 1 - F_X(2 - y)$$

En passant par la dérivée on obtient :

$$f_Y(y) = f_X(2 - y)$$

$2 - y$	y	$f_X(2-y)$	$f(y)$
$-\infty < 2 - y \leq 0$	$2 \leq y$	0	0
$0 < 2 - y \leq 1$	$1 \leq y < 2$	$\frac{2-y}{3}$	$\frac{2-y}{3}$
$1 < 2 - y \leq 2$	$0 \leq y < 1$	$1/3$	$1/3$
$2 - y > 2$	$y < 0$	$\frac{1}{2}e^y$	$\frac{1}{2}e^y$

$$f_Y(y) = 0 \quad si \quad y \geq 0$$

$$f_Y(y) = \frac{2-y}{3} \quad si \quad 1 \leq y < 2$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{3} \quad si \quad 0 \leq y < 1$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{2}e^y \quad si \quad y < 0$$

Solution de l'exercice 2.10.3

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{10}{x^2}, & x\geq 10\\ 0, & sinon\end{cases}$$

1- $P(X>20)=10\int_{20}^{+\infty}\frac{1}{x^2}=10\left[\frac{-1}{x}\right]_{20}^{+\infty}=\frac{10}{20}=\frac{1}{2}$

2- $F_X(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt$

si : $x<10$

$$F_X(x)=\int_{-\infty}^{x}0\,dt=0$$

si : $x\geq 10$

$$F_X(x)=\int_{-\infty}^{10}0\,dt\;+\int_{10}^{x}\frac{10}{t^2}dt=10\left[\frac{-1}{t}\right]_{10}^{x}=1-\frac{10}{x}$$

$$F_X(x)=1-\frac{10}{x}\quad,\ x\geq 10$$

$$si\ on\ veut\ calculer\ P(X>20)en\ utilisant\ la\ fonctionde\ répartition\ on\ aura:$$

$$P(X>20)=1-F(20)=1-\left[1-\frac{10}{20}\right]=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

3- On calcule d'abord la probabilité que la durée de charge est d'au moins 15 heures c'est-à-dire $P(X\geq 15)=$

a- $P(X\geq 15)=1-F(15)=1-\left[1-\frac{10}{15}\right]=0.67$

$$Y\leadsto B(6{,}0.67)$$

$$P(Y=k)=C_6^k0.67^k(1-0.67)^{6-k}$$

b- $P(Y\geq 3)=1-P(Y\leq 2)=0.9031$

c- $E(Y)=6*0.67=4.02$

Solution de l'exercice 2.10. 4

Loi de $Y=X^2$

$$F_Y(y)=P(Y\leq y)=P(X^2\leq y)=P\left(|X|\leq\sqrt{y}\right)=P\left(-\sqrt{y}\leq X\leq\sqrt{y}\right)$$
$$=F_X\left(\sqrt{z}\right)-F_X\left(-\sqrt{z}\right)$$

$$f(y)=\frac{1}{2\sqrt{y}}f_X\left(\sqrt{y}\right)+\frac{1}{2\sqrt{y}}f_X\left(-\sqrt{y}\right)=\frac{1}{2\sqrt{y}}f_X\left(\sqrt{y}\right)=\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}y},\qquad y\geq 0$$

$$Y \rightsquigarrow Exp\left(\frac{1}{2}\right), E(Y) = 2$$

a - $T = durée\ en\ heure\ entre\ deux\ précipitations$

$$T = \lambda Y$$

$$P(T > 24) = 0.09 \Leftrightarrow P(\lambda Y > 24) = 0.09 \Leftrightarrow P\left(Y > \frac{24}{\lambda}\right) = 0.09 \Leftrightarrow e^{-\frac{24}{2\lambda}} = 0.09$$

$$\Leftrightarrow -\frac{12}{\lambda} = -2.4 \Leftrightarrow \lambda = 5$$

b- $E(T) = E(\lambda Y) = \lambda E(Y) = 5.2 = 10$

c- $P(0 < T < 2) = P(T < 2) = P(\lambda Y < 2) = P\left(Y < \frac{2}{\lambda}\right) = P\left(Y < \frac{2}{5}\right)$

$$= F_Y\left(\frac{2}{5}\right) = 1 - e^{-\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{2}} = 1 - e^{-\frac{1}{5}}$$

Solution de l'exercice 2.10.5

$$X \rightsquigarrow U_{[10,11]}$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \in [10,11] \\ 0 & sinon \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < 10 \\ x - 10 & si \ 10 \le x \le 11 \\ 1 & si \quad x \ge 11 \end{cases}$$

1- $P(X < 10.16) = F_X(10.16) = \int_{10}^{10.16} dx = 0.16$

2- $P(10.33 < X < 10.66) = F_X(10.66) - F_X(10.33) = 0.66 - 0.33 = 0.33$

3- $P(10h15 < X < 10h25) = P(10.25 < X < 10.41) = 0.41 - 0.25 = 0.16$

Solution de l'exercice 2.10.6

1- $X \rightsquigarrow U_{[0,1]}$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \in [0,1] \\ 0 & sinon \end{cases}$$

2- $Y = -aLn\, X$

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(-aLn\, X \le y) = P\left(Ln\, X \ge \frac{-y}{a}\right) = P\left(X \ge e^{\frac{-y}{a}}\right)$$

$$F_Y(y) = 1 - F_X\left(e^{\frac{-y}{a}}\right) \Rightarrow f_Y(y) = \frac{1}{a} e^{\frac{-y}{a}}, \quad Y \rightsquigarrow Exp\left(\frac{1}{a}\right)$$

$$E(Y) = a \ \ et\ V(Y) = a^2$$

3- $F(y) = \begin{cases} 0 & , \quad y < 0 \\ 1 - e^{\frac{-y}{a}}, & y \geq 0 \end{cases}$

4- $P(Y > 2a) = 1 - P(Y \leq 2a) = e^{-\frac{1}{a}2a.} = e^{-2}$

Solution de l'exercice 2.10.7 X ↝ N(8,4) , Y ↝ N(7.5,1)

1- $P(7 \leq X \leq 9) = \Phi_{N(0,1)}\left(\frac{9-8}{2}\right) - \Phi_{N(0,1)}\left(\frac{7-8}{2}\right) = 2\Phi(0.5) - 1 \approx 0.38$

Pour la 2ème machine

$$P(7 \leq Y \leq 9) = \Phi_{N(0,1)}\left(\frac{9-7.5}{1}\right) - \Phi_{N(0,1)}\left(\frac{7-7.5}{1}\right) = \Phi(1.5) - \Phi(-0.5) \approx 0.62$$

On en conclut que la machine B est meilleure que la machine A.

2- Soit Z une nouvelle v.a. qui décrit la taille des pièces produites par la machine A. cette variable à la même espérance que X et on cherche sa variance de telle sorte que les machines soient de qualité égale.

$$P(7 \leq Z \leq 9) = P\left(\frac{-1}{\sigma} \leq \frac{Z-8}{\sigma} \leq \frac{1}{\sigma}\right) = 2P\left(Z \leq \frac{1}{\sigma}\right) - 1 \approx 0.62$$

Solution de l'exercice 2.10.8

X : associe le nombre d'appareils de marque A vendus ce jour-là.

1- On peut assimiler ces 40 ventes indépendantes à un schéma de Bernoulli ou l'évènement « succès » est « l'appareil de marque A est vendu », alors la variable X suit la loi Binomiale de paramètres $n = 40$ et $p = 0.386$ (la marque A réalise 38.6 % du marché).

$$P(X = k) = C_{40}^{k} 0.386^{k}(1 - 0.386)^{40-k}$$

2- $P(X = 20) = C_{40}^{20}\, 0.386^{20}(1 - 0.386)^{40-20} = 0.04$

3- $E(X) = np = 40 * 0.386 = 15.44 \quad et$

$$\sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{40 * 0.386 * 0.614} = 3.08$$

4- On décide d'approcher cette loi par la loi Normale de paramètres de paramètres $m = 15.44\ \ et\ \sigma = 3.08$ puisque :

$$n = 40 \geq 30\ et\ \ np = 15.44 \geq 5\ et\ \ n(1-p) = 9.5 \geq 5$$

$$Y \backsim N(15.44; 3.08 = \sigma)$$

5- Donner une approximation de la probabilité de l'évènement : « il y'a exactement 20 appareils de marque A vendus »

$$P(Y = 20) = P(20 - 0.5 \leq Y \leq 20 + 0.5) = P(19.5 \leq Y \leq 20.5) =$$

$$\Phi_{N(0,1)}\left(\frac{20.5 - 15.44}{3.08}\right) - \Phi_{N(0,1)}\left(\frac{19.5 - 15.44}{3.08}\right) =$$

$$\Phi_{N(0,1)}(1.64) - \Phi_{N(0,1)}(1.31) = 0.044$$

1- $P(Y \geq 20) = 1 - \Phi_{N(0,1)}\left(\frac{19.5-15.44}{3.08}\right) = 1 - \Phi_{N(0,1)}(1.318) = 0.905$

Solution de l'exercice 2.10.9

1- $\boldsymbol{X} \backsim N(500\,, 12)$

$$P(X < 485) = P\left(Y < \frac{485 - 500}{12}\right) = \Phi(-1.25) = 0.105$$

2- $P(500 - h < X < 500 + h) = \Phi\left(\frac{\mathrm{h}}{12}\right) - \Phi\left(-\frac{\mathrm{h}}{12}\right) = 0.95$

$$\Phi\left(\frac{\mathrm{h}}{12}\right) = 0.975 \Longrightarrow h = 23.52$$

3- $\boldsymbol{Z} \backsim B(200\,, 0.02)$
$P(Z = k) = C_{200}^{k} 0.02^{k} 0.98^{200-k}$

$$B(200{,}0.02) \xrightarrow[n\geq 30 \;et\; p\; \leq 0.1 et\; np\leq 15]{\text{Approximée}} \mathcal{P}(4)$$

Comme $n \geq 30 \;\; et\, p \;\leq 0.1 \; et \; np \leq 15$ alors on peut approximer la loi binomiale par la loi de Poisson $\mathcal{P}(np) = \mathcal{P}(4)$

$$P(Z = k) = \frac{e^{-4}4^{k}}{k!}$$

Solution de l'exercice 2.10.10

a- $P(|X - 6| \geq 5) \leq \frac{4.2}{25} = 0.168 = 16.8\,\%$

b- $P(1 < X < 11) = P(-5 < X - 6 < 5) = P(|X - 6| < 5) \geq 1 - \frac{4.2}{25} = 0.832 = 83.2\%$

c- $P(X \geq 10) \leq \frac{6}{10} = 0.6$

d- $|X - 6| \geq 5 \Leftrightarrow \begin{cases} X - 6 \geq 5 \\ ou \\ X - 6 \leq -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X \geq 11 \\ ou \\ X \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow X \in \{0,1,11,12, \dots \dots, 20\}$

$$P(|X - 6| \geq 5) = 1 - P(|X - 6| \leq 4) = 1 - P(-4 \leq X - 6 \leq 4) = 1 - P(2 \leq X \leq 10)$$
$$= 0.025 = 2.5\%$$

Chapitre 3

3 Couples de variables aléatoires discrètes

Dans la vie réelle, nous nous intéressons souvent à plusieurs variables aléatoires liées les unes aux autres. Par exemple, supposons que nous choisissions une famille au hasard et que nous voulions étudier le nombre de personnes dans la famille, le revenu du ménage, l'âge des membres de la famille, etc. Chacun de ces éléments est une variable aléatoire et nous soupçonnons qu'ils sont dépendants. Dans ce chapitre, nous développons des outils pour étudier les distributions conjointes de variables aléatoires. Les concepts sont similaires à ceux que nous avons vus jusqu'à présent. La seule différence est qu'au lieu d'une variable aléatoire, nous en considérons deux ou plus. Dans ce chapitre, nous nous concentrerons sur deux variables aléatoires. Nous commencerons par discuter des distributions conjointes de variables aléatoires discrètes, puis nous étendrons les résultats aux variables aléatoires continues.

Compétences attendues

- ✓ **Obtenir la loi d'un couple(X, Y), ses lois marginales.**
- ✓ **Déterminer la fonction de répartition d'un couple(X, Y), ses lois marginales.**
- ✓ **Calculer la covariance.**
- ✓ **Etudier l'indépendance de deux variables aléatoires discrètes.**
- ✓ **Déterminer la loi de $X + Y$ à l'aide du produit de convolution.**

3.1 Exemples et Définitions

3.1.1. Exemple : On lance deux pièces non truquées et de couleur distincte, on note X le résultat de la première pièce et Y le résultat de la deuxième pièce. On peut étudier le couple de variables aléatoires (X, Y)

3.1.2. Exemple : On lance deux dés de couleur différente. On note X le résultat du premier dé, Y celui du deuxième dé. (X, Y) forment un couple de variable aléatoires.

3.1.3. Exemple : Dans une urne se trouve trois billes numérotées de 1 à 3. On effectue trois tirages successifs et avec remise. On note m le minimum des trois tirages et M le maximum des trois tirages. (m, M) forment un couple de variable aléatoires.

3.2 Loi du couples

3.2.1 Définition $\boldsymbol{X\ et\ Y}$ deux variables aléatoires définies respectivement dans $\boldsymbol{X(\Omega)\ et\ Y(\Omega)}$.

On appelle loi de probabilité conjointe, du couple (X, Y) la fonction :

$$P_{X,Y}(x, y) = P(X = x, Y = y)$$

$$avec \qquad \sum_{x\in X(\Omega)} \sum_{y\in Y(\Omega)} P(X = x, Y = y) = 1$$

Exemple 1 : Dans le premier exemple $X(\Omega) = Y(\Omega) = \{0,1\}$ en supposant que X vaut 1 dans le cas d'un pile et 0 sinon. La loi du couple est la donnée des quatre réels suivants :

$$P([X = 1] \cap [Y = 1]) = 1/4$$

$$P([X = 0] \cap [Y = 1]) = 1/4$$

$$P([X = 1] \cap [Y = 0]) = 1/4$$

$$P([X = 0] \cap [Y = 0]) = 1/4$$

Exemple 2 : Dans le deuxième exemple $X(\Omega) = Y(\Omega) = 1/6$ et la loi de probabilité du couple est donnée par $\forall i \in 1,..,6\ \forall j \in 1,..,6 \quad P([X = i] \cap [Y = j]) = 1/36$.

3.3 Lois Marginales : Soit $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ un couple de variable aléatoires discrètes alors :

La loi marginale de X est donnée par le théorème des probabilités totales.

$$\forall x \in X(\Omega) \quad , \quad \mathrm{P(X = x)} = \sum_{y \in Y(\Omega)} P(X = x, Y = y)$$

et $\forall y \in Y(\Omega)$, $\mathrm{P(Y = y)} = \sum_{x \in X(\Omega)} P(X = x, Y = y)$

Exemple : Soit (X, Y) un couple de v.a discrètes dont la loi conjointe est donnée par le tableau suivant :

Après avoir vérifié que le tableau suivant décrit bien une loi conjointe, trouver les lois marginales de X et .

X / Y	**Y=1**	**Y=2**	**Y=3**	$\boldsymbol{P(X = x)}$
X=1	**1/6**	**1/6**	**1/6**	**3/6**
X=2	**1/12**	**0**	**1/18**	**5/36**
X=3	**1/12**	**1/6**	**2/18**	**13/36**
$\boldsymbol{P(Y = y)}$	**1/3**	**1/3**	**1/3**	**1**

3.4 Fonction de répartition d'un couple discret

Souvenez-vous que pour une variable aléatoire X, la fonction de répartition

$F_X(x) = P(X \leq x)$. Maintenant La fonction de répartition du couple (X, Y) est définie par :

$$F_{X,Y}(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y) = P\big((X \leq x) \; et \; (Y \leq y)\big)$$

3.5 Fonctions de répartition marginales

$$F_X(x) = \operatorname*{Lim}_{y \to +\infty} F(x, y)$$

$$F_Y(y) = \operatorname*{Lim}_{x \to +\infty} F(x, y)$$

Notons également que nous devons avoir :

$$F_{X,Y}(\infty, \infty) = 1$$

$$F_{X,Y}(-\infty, y) = 0 \quad , \qquad \forall \, y$$

$$F_{X,Y}(x, -\infty) = 0 \quad , \qquad \forall \, x$$

Exemple $X, Y \rightsquigarrow B(p)$ qui sont indépendantes, $0 < p < 1$. $(1 - p = q)$

1- Déterminer la loi conjointe de X et Y.
2- Déterminer la fonction de répartition jointe de X et Y.

Solution

X / Y	$Y = 0$	$Y = 1$	$P(X = x)$
$X = 0$	q^2	$p.q$	q
$X = 1$	$p.q$	p^2	p
$P(Y = y)$	q	p	1

1er Cas : $x < 0$ ou $y < 0$: $F(x,y) = P(X \le x, Y \le y) = 0$

2ème Cas : $0 \le x < 1$ et $0 \le y < 1$: $F(x,y) = P(X = 0, Y = 0) = q^2$

3ème Cas : $0 \le x < 1$ et $y \ge 1$: $F(x,y) = P(X = 0, Y = 0) + P(X = 0, Y = 1) = q^2 + pq = q$

4ème Cas : $x \ge 1$ et $0 \le y < 1$ $F(x,y) = P_{X,Y}(0,0) + P_{X,Y}(1,0) = q^2 + pq = q$

5ème Cas: $x \ge 1$ et $y \ge 1$: $F(x,y) = P_{X,Y}(0,0) + P_{X,Y}(1,0) + P_{X,Y}(0,1) + P_{X,Y}(1,1) = 1$

$$F_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 0, & x < 0 \text{ ou } y < 0 \\ q^2, & 0 \le x < 1 \text{ et } 0 \le y < 1 \\ q, & 0 \le x < 1 \text{ et } y \ge 1 \\ q, & x \ge 1 \text{ et } 0 \le y < 1 \\ 1, & x \ge 1 \text{ et } y \ge 1 \end{cases}$$

$$F_X(x) = Lim_{y \to +\infty} F(x,y) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ q, & 0 \le x < 1 \\ 1, & x \ge 1 \end{cases}$$

C'est-à dire les cas ou $y \geq 1$

$$F_Y(y) = Lim_{x \to +\infty} F(x,y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ q, & 0 \le y < 1 \\ 1, & y \ge 1 \end{cases}$$

3.6 Couples de variables aléatoires indépendantes

Nous avons défini précédemment des variables aléatoires indépendantes. Maintenant que nous avons vu les lois et les Fonctions de répartitions conjointes, nous pouvons reformuler la définition de l'indépendance.

Deux variables aléatoires discrètes X et Y sont indépendantes si :

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x).P(Y = y) \ , \ \forall\, (x, y) \in X(\Omega) \times \ Y(\Omega)$$

De manière équivalente,

X et Y sont indépendantes si :

$$F_{X,Y}(x, y) = F_X(x).F_Y(y) \ , \ \forall\, (x, y) \in X(\Omega) \times \ Y(\Omega)$$

3.7 Propriétés de la fonction de répartition

(X, Y) un couple de variables aléatoires de fonction de répartition F et a, b, c, d des réels tels que : $a < b \ \ et \ c < d$ alors :

1- $F_{X,Y}(x, y)$ est une probabilité, $0 \leq F_{X,Y}(x, y) \leq 1$ pour $-\infty < x < \infty, -\infty < y < \infty$.
2- $P(a < X \leq b, c < Y \leq d) = F(b, d) - F(a, d) - F(b, c) + F(a, c)$.
3- $P(X \leq a, c < Y \leq d) = F(a, d) + F(a, c)$.
4- $P(a < X \leq b, Y \leq c) = F(b, c) - F(a, c)$
5- $P(X > a, Y > b) = 1 - P([X \leq a] \cup [Y \leq b] = 1 - F(a) - F(b) + F(a, b)$
6- $P[a < X \leq b, Y \leq y] = F(b, y) - F(a, y)$

3.8 Lois Conditionnelles

Dans certains problèmes, nous avons observé la valeur d'une variable aléatoire Y et nous devons mettre à jour la loi de probabilité d'une autre variable aléatoire X dont la valeur n'a pas encore été observée. Dans ces problèmes, nous utilisons la loi conditionnelle de X sachant Y défini comme suit :

$$P(X = x / Y = y) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(Y = y)} \quad , \quad x \in X(\Omega)$$

De manière équivalente :

$$P(Y = y / X = x) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(X = x)} \quad , \quad Y \in Y(\Omega)$$

3.9 Moment d'ordre, Espérance mathématique et Variance d'une variable aléatoire continue

On appelle espérance conditionnelle de X sachant $(Y = y)$ la variable aléatoire donnée par :

$$E(X/Y = y) = \sum_{x \in X(\Omega)} x\, P(X = x/Y = y)$$

De la même manière on définit l'espérance conditionnelle de Y sachant $(X = x)$la variable aléatoire donnée par :

$$E(Y/X = x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} y\, P(Y = y/X = x)$$

On définit également les autres moments conditionnels :

$$E(X^k/Y = y) = \sum_{x \in X(\Omega)} x^k P(X = x/Y = y)$$

$$E(Y^k/X = x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} y^k P(Y = y/X = x)$$

La variance conditionnelle de X sachant $Y = y$ est définie par:

$$V(X/Y = y) = E(X^2/Y = y) - [E(X/Y = y)]^2$$

$$V(Y/X = x) = E(Y^2/X = y) - [E(Y/X = x)]^2$$

3.10 Propriétés des moments conditionnels

- $E(X/Y = y) = \sum_{x \in X(\Omega)} x\, P(X = x/Y = y)$.
- $E(a/Y) = a$, *pour tout a appartenant* à R
- $E(X/X) = X$
- $E(aX + bY/Z) = aE(X/Z) + bE(Y/Z)$
- $E(X^2/Y = y) = \sum_{x \in X(\Omega)} x^2\, P(X = x/Y = y)$.
- $E[E(X/Y = y)] = \sum_{y \in Y(\Omega)} E(X/Y = y)\, P(Y = y) = E(X)$.
- $E[E(X^2/Y = y)] = \sum_{y \in Y(\Omega)} E(X^2/Y = y)\, P(Y = y) = E(X^2)$.
- $V(X/Y = y) = E(X^2/Y = y) - [E(X\,/\,(Y = y))]^2$.
- $\boldsymbol{E[V(X\,/\,(Y = y))]} = \sum_{y \in Y(\Omega)} V(X/Y = y)\, P(Y = y) =$

  $= E[E(X^2/Y = y) - [E(X\,/\,(Y = y))]^2] = \boldsymbol{E(X^2) - E([E(X\,/\,(Y = y))]^2)}$.

- $\boldsymbol{V[E(X\,/\,(Y = y))]} = E([E(X\,/\,(Y = y))]^2) - \{E[E(X/Y = y)]\}^2$

  $= \boldsymbol{E([E(X\,/\,(Y = y))]^2) - \left(E(X)\right)^2}$.

- $\boldsymbol{E[V(X\,/\,(Y = y))] + V[E(X\,/\,(Y = y))] = V(X)}$

3.11 Espérance pour des variables aléatoires indépendantes

Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes, alors :

- $E(X/Y) = E(X)$
- $E(g(X)/Y) = E(g(X))$
- $E(X.Y) = E(X).E(Y)$
- $E(g(X).h(Y)) = E\big(g(X)\big).E(g(Y))$

Exemple Soit (X, Y) un couple de v.a discrètes dont la loi conjointe est donnée par le tableau suivant tel que $E(X) = E(Y) = 5/3 = 1.66$

	Y= 1	**Y = 2**	**Loi de X**
X= 1	**0**	**1/3**	**1/3**
X= 2	**1/3**	**1/3**	**2/3**
Loi de Y	**1/3**	**2/3**	**1**

1- Calculer $E(Y/X = x), E(Y^2/X = x)$ et $V(Y/X = x)$

2- Calculer $[\ V(Y\ /\ X = x)]$, $V[\ E(Y\ /\ X = x)]$ et

$$E[\ V(Y\ /\ X = x)] + V[\ E(Y\ /\ X = x)]$$

3- Vérifier que $E[\ V(Y\ /\ X = x)] + V[\ E(Y\ /\ X = x)] = V(Y)$

Solution

$\boldsymbol{y}$	**1**	**2**	$\boldsymbol{E(Y/X = x)}$	$\boldsymbol{E(Y^2/X = x)}$	$\boldsymbol{V(Y/X = x)}$
$\boldsymbol{P((Y/X = 1)}$	0	1	2	4	0
$\boldsymbol{P(Y/X = 2)}$	1/2	1/2	3/2	5/2	1/4

2-

$$E[\ V(Y\ /\ X = x)] = \sum_{x=1,2} V(Y/X = x)\ P(X = x) = 0 + \frac{1}{4}.\frac{2}{3} = 0.16.$$

$$V[\,E(Y\,/\,X=x)] = \boldsymbol{E}([\boldsymbol{E}(\boldsymbol{Y}\,/\,(\boldsymbol{X}=\boldsymbol{x}))]^2) - \left(\boldsymbol{E}(\boldsymbol{Y})\right)^2$$

$$\boldsymbol{E}([\boldsymbol{E}(\boldsymbol{Y}\,/\,(\boldsymbol{X}=\boldsymbol{x}))]^2) = \boldsymbol{4}.\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{3}} + \frac{\boldsymbol{9}}{\boldsymbol{4}}.\frac{\boldsymbol{2}}{\boldsymbol{3}} = \boldsymbol{2.83}$$

$$E(Y) = 1.\frac{1}{3} + 2.\frac{2}{3} = \frac{5}{3} = 1.66$$

Par suite : $V[\,E(Y\,/\,X=x)] = 2.83 - (1.66)^2 = 0.06$

3-Finalement :

$$E[\,V(Y\,/\,X=x)] + V[\,E(Y\,/\,X=x)] = 0.16 + 0.06 = 0.22 = V(Y)$$

3.12 La covariance

Soit $(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$ un couple de variables aléatoires

On appelle covariance de X, la valeur réelle, définie comme suit :

$$Cov(X,Y) = E(X.Y) - E(X).E(Y) = E[(X-EX)(Y-EY)]$$

La covariance sert à déterminer la direction d’une relation linéaire entre 2 variables comme suit :

- Si $Cov(X,Y)$ est positif ⟹ X et Y tendent à augmenter ou à diminuer ensemble

- Si $Cov(X,Y)$ est négative ⟹ X tend à augmenter, l’autre diminue.

- Si $Cov(X,Y) = 0 \Rightarrow X\ et\ Y\ sont\ non\ corrélés$

3.12.1 Propriétés de la covariance

- $Cov(X,Y) = Cov(Y,X)$
- $Cov(X,X) = V(X)$
- $Cov(a,X) = 0$
- $Cov(aX+bY,cZ+dW) = acC(X,Z) + adCov(X,W) + bcCov(Y,Z) + bdCov(Y,W)$
- $Cov(aX+bY,Z) = a\ Cov(X,Z) + b\ Cov(Y,Z)$
- $Cov(X,cZ+dW) = c\ Cov(X,Z) + d\ Cov(X,W)$
- $V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2Cov(X,Y)$
- $V(aX+bY) = a^2V(X) + b^2V(Y) + 2.a.bCov(X,Y)$
- $si\ X\ et\ Y\ sont\ indépendantes\ alors\ V(X+Y) = V(X) + V(Y)$

3.13 Le Coefficient de corrélation linéaire

$$\boldsymbol{r = Corr(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X . \sigma_Y}} \qquad (\boldsymbol{-1 \leq r \leq 1})$$

Le coefficient de corrélation sert à mesurer le degré de liaison linéaire entre X et Y.

- $r > 0$ signifie X et Y tendent à augmenter ou à diminuer ensemble.
- $r < 0$ signifie X tend à augmenter, l'autre diminue.
- $r \longrightarrow 0$ la relation linéaire est faible.
- $r = \pm 1$ signifie une corrélation parfaite et X et Y sont liés par une relation

$Y = aX + b \quad (r = +1 \quad si \quad a > 0)$.

Le coefficient de corrélation linéaire quantifie la force du lien linéaire entre X et Y.

- Si $r = 1$ ou $r = -1$, alors il existe deux réels a et b tels que $Y = aX + b \quad Y$ dépend affinement de X.
- Si au contraire r est proche de 0, alors X et Y ne dépendent pas affinement l'un de l'autre.(il n'y a pas de corrélation entre X et Y)

3.14 Loi de la somme de deux variables aléatoires discrètes (Produit de Convolution)

3.14.1 Définition

Soient $\boldsymbol{X}$ et $\boldsymbol{Y}$ deux variables aléatoires indépendantes discrètes. La loi de $Z = X + Y$ est donnée par :

$$P(Z = z) = \sum_{x \in X(\Omega), Y(\Omega)} P(X = x, Y = z - x) = \sum_{x \in X(\Omega), x \in Y(\Omega)} P(X = x). P(Y = z - x)$$

Exemple X et Y deux v.a. indépendantes discrètes

1- $X \leadsto Poisson(\lambda) \;\; et \;\; Y \leadsto Poisson(\mu)$

Montrer que $X + Y \leadsto Poisson(\lambda + \mu)$

2- $X \leadsto B(n,p) \;\; et \;\; Y \leadsto B(m,p)$

Montrer que $X + Y \leadsto B(n + m, p)$

3- $X \leadsto G(p) \;\; et \;\; Y \leadsto G(p)$, Déterminer la loi de $Z = X + Y$.

Solution

1- $P(Z = z) = \sum_{x=0}^{z} P(X = x). P(Y = z - x) = \sum_{x=0}^{z} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} \frac{e^{-\mu}\mu^{z-x}}{(z-x)!}$

$$= e^{-(\lambda+\mu)} \sum_{x=0}^{z} \frac{\lambda^x \mu^{z-x}}{x!\,(z-x)!} \cdot \frac{z!}{z!} = \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{z!} \sum_{x=0}^{z} C_z^x \lambda^x \mu^{z-x} = \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{z!} (\lambda+\mu)^z$$

$$X + Y \rightsquigarrow Poisson(\lambda+\mu) \quad (la\ stabilité\ de\ la\ loi\ par\ rapport\ à\ la\ somme)$$

2- $P(Z=z) = \sum_{0\le x\le n\ et 0\le z-x\le m} C_n^x p^x q^{z-x} C_m^x p^{z-x} q^{m-z+x}$

$$= \sum_{x=0}^{z} C_n^x C_m^{z-x} p^z q^{(n+m)-z} = C_{n+m}^z p^z q^{(n+m)-z}$$

$$Z = X + Y \rightsquigarrow B(n+m,p) \qquad (la\ stabilité\ de\ la\ loi\ par\ rapport\ à\ la\ somme)$$

$$Z(\Omega) = \{0, \dots\dots\dots, n+m\}$$

3- $P(Z=z) = \sum_{x=1}^{z-1} pq^{x-1} pq^{z-x-1} = p^2 \sum_{x=1}^{z-1} q^{z-2} = p^2 q^{z-2}(z-1)$

4-

3.14.2 Proposition_ Soient ***X*** et ***Y*** deux v.a. indépendantes

1- $X \rightsquigarrow B(n,p)\ \ et\ \ Y \rightsquigarrow B(m,p)\ \ alors :\ \ X+Y \rightsquigarrow B(n+m,p)$
2- $X \rightsquigarrow Poisson(\lambda)\ \ et\ \ Y \rightsquigarrow Poisson(\mu)\ alors :\ X+Y \rightsquigarrow Poisson(\lambda+\mu)$

3.14.3 Proposition Si ***X*** et ***Y*** sont indépendantes alors :

$$G_{X+Y}(t) = G_X(t).G_Y(t)$$
$$M_{X+Y}(t) = M_X(t).M_Y(t)$$

Exemple Calculer de deux manières la loi de la somme de deux variables aléatoires indépendantes

Lorsque :

1- $X \rightsquigarrow B(p)\ \ et\ \ Y \rightsquigarrow B(p)$
2- $X \rightsquigarrow B(n,p)\ \ et\ \ Y \rightsquigarrow B(m,p)$
3- $X \rightsquigarrow Poisson(\lambda)\ \ et\ \ Y \rightsquigarrow Poisson(\mu)$

Corrigé

1- $X \rightsquigarrow B(p)\ \ et\ \ Y \rightsquigarrow B(p)$

(i) **Calcul direct :**

$X(\Omega) = Y(\Omega) = \{0,1\}$ et $Z(\Omega) = \{0,1,2\}$

$$P(Z=0) = P(X=0, Y=0) = P(X=0)P(Y=0) = q^2 = C_2^0 p^0 q^2$$

$$P(Z=1) = P(X=0, Y=1) + P(X=1, Y=0) = 2pq = C_2^1 p.q$$

$$P(Z=2) = P(X=1, Y=1) = P(X=1)P(Y=1) = p^2 = C_2^2 p^2 q^0$$

(ii) **En utilisant $G_X(t)$:**

$$G_X(t) = E(t^X) = \sum_{k=0}^{1} t^k P(X = k) = q + tp = G_Y(t)$$

$$G_Z(t) = G_{X+Y}(t) = (q + tp)^2$$

On reconnait la fonction génératrice d'une loi Binomiale de paramètres $\mathbf{2}$ $\boldsymbol{et\ p}$.

2- $X \leadsto B(n,p)\ \ et\ \ Y \leadsto B(m,p)$

(i) **Calcul direct :**

$$P(Z = z) = \sum_{0 \le x \le n\ \ et 0 \le z-x \le m} C_n^x p^x q^{z-x} C_m^x p^{z-x} q^{m-z+x}$$

$$= \sum_{x=0}^{z} C_n^x C_m^{z-x} p^z q^{(n+m)-z} = C_{n+m}^z p^z q^{(n+m)-z}$$

$$Z = X + Y \leadsto B(n + m, p)$$

(ii) **En utilisant $G_X(t)$:**

$$G_X(t) = E(t^X) = (q + tp)^n$$

$$G_Y(t) = E(t^Y) = (q + tp)^m$$

$$G_Z(t) = G_{X+Y}(t) = (q + tp)^{n+m}$$

On reconnait la fonction génératrice d'une loi Binomiale de paramètres $\mathbf{n+m}$ $\boldsymbol{et\ p}$.

3- $X \leadsto Poisson(\lambda)\ \ et\ \ Y \leadsto Poisson(\mu)$

(i) **Calcul direct :**

$$P(Z = z) = \sum_{x=0}^{z} P(X = x).P(Y = z - x) = \sum_{x=0}^{z} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}\frac{e^{-\mu}\mu^{z-x}}{(z-x)!}$$

$$= e^{-(\lambda+\mu)} \sum_{x=0}^{z} \frac{\lambda^x \mu^{z-x}}{x!\,(z-x)!}.\frac{z!}{z!} = \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{z!} \sum_{x=0}^{z} C_z^x \lambda^x \mu^{z-x} = \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{z!}(\lambda + \mu)^z$$

$$X + Y \leadsto Poisson(\lambda + \mu)\ \ \ (la\ stabilit\acute{e}\ de\ la\ loi\ par\ rapport\ \grave{a}\ la\ somme)$$

(ii) **En utilisant $G_X(t)$:**

$$G_X(t) = E(t^X) = \sum_{k=0}^{+\infty} t^k \frac{e^{-\lambda}\boldsymbol{\lambda}^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} = e^{-\boldsymbol{\lambda}} e^{\boldsymbol{\lambda t}}$$

$$G_Y(t) = E(t^Y) = \sum_{k=0}^{+\infty} t^k \frac{e^{-\mu}\boldsymbol{\mu}^k}{k!} = e^{-\mu} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\mu t)^k}{k!} = e^{-\mu} e^{\mu t}$$

$$G_Z(t) = G_{X+Y}(t) = e^{-(\lambda+\mu)} e^{(\lambda+\mu)t}$$

Qui est la fonction génératrice d'une loi de Poisson de paramètres $\lambda + \mu$.

3.15 Exercices

3.15.1 Exercice Une urne contient 3 boules dont une est numérotée 1 et les autres 2. On tire successivement et sans remise 2 boules de l'urne. Soient $\boldsymbol{X}$ la v.a.égale au numéro obtenu au 1er tirage et $\boldsymbol{Y}$ la v.a.égale au numéro obtenu au 2ème tirage**.**

1- Déterminer la loi de (X, Y).
2- Calculer $Cov(X, Y)$.

3.15.2 Exercice Une urne contient 4 boules numérotées de 1 à 4. On tire au hasard successivement et avec remise 2 boules. Soient X le numéro de la première boule tirée, Y le numéro de la deuxième boule et Z le plus grand des deux numéros obtenus.

1- Déterminer la loi de (X, Y).
2- Déterminer la loi de (X, Z).
3- Déterminer les lois marginales de $X \ et \ Y$.

3.15.3 Exercice Une boite contient 6 transistors, dont 1 de marque A, 2 de marque B et 3 de marque C.

Deux transistors sont tirés simultanément au hasard.

Soit X (respectivement Y) le nombre de transistors de marque A (respectivement de marque B) parmi les deux tirés.

1- Déterminer la loi du couple, ainsi que les lois marginales
2- X et Y sont-elles indépendantes ? justifier.
3- $Calculer \ P(X = Y)$.
4- $Calculer \ F_{X,Y}(0.5, -0.6), F_{X,Y}(0.2, 0.33), F_{X,Y}(2, 1.5), \quad F_{X,Y}(3, 5)$
5- On pose $Z = X.Y$, $W = X - Y$. Dresser le tableau de la loi conjointe du couple (Z, W).

3.15.4 Exercice Le tableau suivant donne une partie de la loi conjointe d'un couple de variable aléatoires discrètes $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$

	Y= -1	**Y = 1**	**Y = 2**	**Loi de X**
X= -2	**0.2**	**?**	**?**	**0.45=P(X=-2)**
X = 0	**?**	**?**	**0.05**	**?**
1	**0.2**	**?**	**?**	**?**
Loi de Y	**0.5**	**0.3**	**0.2**	**1**

Nous avons aussi la loi conditionnelle $de\ Y\ sachant\ X = 1$, donnée par :

$$P(Y = -1/X = 1) = \frac{2}{3} \quad , \ P(Y = 1/X = 1) = 0$$

1- Déterminer $P(X = 1)$
2- Compléter le tableau ci-dessus.
3- Déterminer la loi conditionnelle de X sachant que $Y = 1$. En déduire $E(X/Y = 1)$.
4- Calculer $Cov(X, Y)$. Les variables $X\ et\ Y\ sont - elles\ indépendantes$?

3.15.5 Exercice Soit $\boldsymbol{X}$ une v.a. discrète de loi : $\boldsymbol{P(X = 1) = \frac{1}{3}}$, $\boldsymbol{P(X = 2) = \frac{2}{3}}$
Y une v.a. telle que : $Y/X = x \backsim B\left(x, \frac{1}{2}\right), x = 1,2.$

1- Déterminer la loi de (X, Y).
2- Calculer $E(Y)$ sans passer par la loi de Y, .

3.15.6 Exercice Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes dont la loi jointe est partiellement donnée dans le tableau ci-dessous :

	X=1	X=4	X=5	X=6
Y=1		0.025	0.075	
Y=2				
Y=3	0.05	0.05	0.2	

On dispose des informations suivantes, permettant de connaitre complètement cette loi jointe.

i- La fonction génératrice des moments de X, $G_X(t) = 0{,}15e^t + 0{,}2e^{4t} + 0{,}3e^{5t} + 0{,}35e^{6t}$.
ii- La fonction génératrice des moments de Y, $G_Y(t) = 0{,}2e^t + 0{,}3e^{2t} + 0{,}5e^{6t}$.
iii- P(X=1, Y=2) = P(X=6 , Y=2)=p

1- A l'aide des informations suivantes, compléter le tableau de la loi jointe.
2- Les variables X et Y sont-elles indépendantes ? NON
3- Calculer les probabilités suivantes : $P(Y \geq 2), P(Y \geq 2/X = 1)$.

3.15.7 Exercice On considère deux variables aléatoires $\boldsymbol{X}$ et $\boldsymbol{Y}$ définie sur un même espace probabilisé. On donne la loi de $\boldsymbol{X}$ sous forme de tableau :

$\boldsymbol{x}$	-5	-2	0	2	5
$\boldsymbol{P(X=x)}$	1/10	7/30	1/3	7/30	1/10

On suppose $Y = X^2 + 1$

Donner la loi du couple (X, Y)

3.15.8 Exercice On considère deux variables aléatoires $\boldsymbol{X}$ et $\boldsymbol{Y}$ indépendantes identiquement distribuées suivant chacune la loi Géométrique de paramètre $(\boldsymbol{p})$, $|\boldsymbol{p}| < \mathbf{1}$, $|\boldsymbol{q}| < \mathbf{1}$

1- Déterminer $P(X = Y)$.
2- Déterminer $P(X < Y)$.

3.15.9 Exercice Soit $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ un couple de variables aléatoire discrètes indépendantes de loi conjointe définie par :

$$P(X = x, Y = y) = c|x - y| , \qquad x \in \{0,1\}\ et\ y \in \{-1,0,1\}$$

1- Vérifier que $c = \frac{1}{5}$.
2- Déterminer la loi du couple (X, Y).
3- Déterminer les lois marginales de $X\ et\ Y$.
4- Déterminer la fonction de répartition $F(x, y)$. Déduire $F(0.5\ ;0.5)$.
5- Calculer $\left[\left(X < \frac{1}{2}\right) \cap (Y > -1)\right]$ $\ et\ P[(X \leq 0.5) \cap (Y = 0.5)]$.
6- $X\ et\ Y\ sont - elles\ indépendantes$?
7- $Calculer\ \ Cov(X, Y)$.
8- $Calculer\ E(e^Y)\ et\ \ E(Y/X = 0)$.
9- $Déterminer\ la\ loi\ conditionnelle\ de\ X\ sachant\ que\ Y = 0$.
10- $Déterminer\ dans\ un\ tableau\ la\ loi\ de\ X + Y$.

3.15.10 Exercice La fonction de répartition de deux v.a. discrètes X et Y est donnée comme suit :

$$F_{XY}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{8} & x = 1\,, y = 1 \\ \frac{5}{8} & x = 1\,, y = 2 \\ \frac{2}{8} & x = 2\,, y = 1 \\ 1 & x = 2\,, y = 2 \end{cases}$$

1- Déterminer la loi conjointe $P_{XY}(x,y)$.
2- Déterminer la loi marginale de X.
3- Déterminer la loi marginale de Y.

3.16 Solutions des exercices

Solution de l'exercice 3.15.1

les boules numérotées :1 ,2, $2'$

1- Tirage successif de 2 boules sans remise

$\Omega = \{(1,2)(1,2')(2,1)(2,2')(2',1)(2',2)\}$

$|\Omega| = A_3^2 = 6$= nombre de cas possible

$$X(\Omega) = Y(\Omega) = \{1\,, 2\}$$

Y / X	1	2	Loi de X
1	**0**	**2/6**	1/3
2	**2/6**	**2/6**	2/3
Loi de Y	1/3	2/3	1

$$P(X = 1, Y = 2) = \frac{A_1^1 A_2^1}{A_3^2} = \frac{2}{6}$$

2- $Cov(X,Y) \; = \; E(X.Y) - E(X).E(Y)$

$$E(X.Y) = 1.1.0 + 1.2.\frac{2}{6} + 2.1.\frac{2}{6} + 2.2.\frac{2}{6} = \frac{16}{6} = \frac{8}{3}$$

$$E(X) = 1.\frac{1}{3} + 2.\frac{2}{3} = \frac{5}{3} = E(Y)$$

$$Cov(X,Y) = \frac{8}{3} - \frac{25}{9} = -0.11$$

Solution de l'exercice 3.15.2

Tirage successif de 2 boules avec remise

$\Omega = \{(1,1),(1,2),(1,3)(1,4)(2,1)(2,2)(2,3)(2,4)(3,1)(3,2)(3,3)(3,4)(4,1)(4,2)(4,3)(4,4)\}$

$|\Omega| = n^p \quad = 4^2 = 16$ cas possible

$P(X = 1, Y = 1) = \frac{1^1 \times 1^1}{16} = \frac{1}{16}$=1/4 .1/4

$$X(\Omega) = Y(\Omega) = \{1\,,2,3,4\}$$

1-

Y / X	1	2	3	4	Loi de X
1	1/16	1/16	1/16	1/16	¼
2	1/16	1/16	1/16	1/16	¼
3	1/16	1/16	1/16	1/16	¼
4	1/16	1/16	1/16	1/16	1/4
Loi de Y	1/4	1/4	1/4	1/4	1

2-

Z le plus grand des deux numéros $= Z(\Omega) = \{1\,,2,3,4\}$

Z / X	1	2	3	4
1	1/16	1/16	1/16	1/16
2	0	2/16	1/16	16
3	0	0	3/16	1/16
4	0	0	0	4/16

$$P(X = 1, Z = 1) = P(X = 1, Y = 1) = \frac{1}{16}$$

$$P(X = 1, Z = 2) = P(X = 1, Y = 2) = 1/16$$

$P(X = 3\,, Z = 3) = ?$

$X = 3 \quad et\; Y = 1,2\,,3$

$$P(X=3\,,Y=3)=\frac{1^1.3^1}{16}=\frac{3}{16}$$

Solution de l'exercice 3.15.3 A, B, B, C, C, C

Tirage simultané de 2 transistors. Donc $|\Omega| = C_6^2 = 15$

X : le nombre de transistors de marque A ; $X(\Omega) = \{0,1\}$

Y : le nombre de transistors de marque B ; $Y(\Omega) = \{0,1,2\}$

X \ Y	0	1	2	Loi de X
0	3/15	6/15	1/15	10/15
1	3/15	2/15	0	5/15
Loi de Y	6/15	8/15	1/15	1

$$P(X=0,Y=0)$$
$$=\{aucun\ transistor\ de\ marque\ et\ aucun\ transistor\ de\ marque\ B\}$$
$$=\frac{C_3^2}{15}=\frac{6}{15}$$
$$P(X=0,Y=1)=P(aucun\ transistor\ de\ marque\ et\ 1\ de\ marque\ B)=$$
$$=P(1\ de\ marque\ C\ et\ 1\ de\ marque\ B)=\frac{C_2^1C_3^1}{C_6^2}=6/15$$
$$P(X=1,Y=2)=P(avoir\ 1\ transistor\ de\ marque\ A\ et\ 2\ de\ marque\ B)$$
$$=impossible)$$

$$P(X=0\,,Y=0)=\frac{C_3^2}{C_6^2}=\frac{3}{15}\quad,\quad P(X=0,Y=1)=\frac{C_2^1C_3^1}{C_6^2}=\frac{6}{15}$$

1- X et Y ne sont pas indépendantes puisque :
   $P(X=1\,,Y=2)=0\neq P(X=1)\times P(Y=2)$
2- $P(X=Y)=P(X=0,Y=0)+P(X=1,Y=1)=5/15$
3- $F_{X,Y}(0.5\,,-0.6)=P(X\le 0.5\,,Y\le -0.6)=0$
   $F_{X,Y}(0.2\,,0.33)=\ P(X=0\,,Y=0)=0$
   $F_{X,Y}(2\,,1.5)=\frac{14}{15},\quad F_{X,Y}(3\,,5)=1$

4- $X(\Omega)=\{0,1\}$ et $Y(\Omega)=\{0,1,2\}$

   $Z=X.Y\quad,\ W=X-Y$

$Z(\Omega) = \{0,1,2\} =$

0.0	0.1	0.2	1.0	1.1	1.2
0	0	0	0	1	2

$W(\Omega) = \{-2,-1,0,1\} =$

0-0	0-1	0-2	1-0	1-1	1-2
0	-1	-2	1	0	-1

Z \ W	-2	-1	0	1	Loi de Z
0	1/15	6/15	3/15	3/15	13/15
1	0	0	2/15	0	2/15
2	0	0	0	0	0
Loi de W	1/15	6/15	5/15	3/15	1

$$P(Z=0,W=-2) = P(X=0,Y=2) = 1/15$$

$$P(Z=0,W=-1) = P(X=0,Y=1) = 6/15$$

$$P(Z=0,W=0) = P(X=0,Y=0) = 3/15$$

$$P(Z=0,W=1) = P(X=1,Y=0) = 3/15$$

$$P(Z=1,W=-2) = 0 \ , \qquad P(Z=1,W=-1) = 0$$

$$P(Z=1,W=0) = P(X=1,Y=1) = 2/15$$

$$P(Z=1,W=1) = 0$$

$$P(Z=2,W=-1) = P(X=1,Y=2) = 0$$

$$P(Z=2,W=-2) = 0$$

$$P(Z=2,W=0) = 0$$

$$P(Z=2,W=1) = 0$$

Solution de l'exercice 3.15.4

X \ Y	-1	1	2	Loi de X
-2	0.2	0.2	0.05	0.45
0	0.1	0.1	0.05	0.25
1	0.2	0	0.1	0.3
Loi de Y	0.5	0.3	0.2	1

1- $P(Y=-1/X=1)=\frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{P(X=1,Y=-1)}{P(X=1)}=\frac{0.2}{P(X=1)}=0.66$

$$\Rightarrow P(X=1)=\frac{0.2}{0.66}=0.3$$

$$P(Y=1/X=1)=0 \Leftrightarrow \frac{P(X=1,Y=1)}{P(X=1)}=0 \Rightarrow P(X=1,Y=1)=0$$

2- Loi de X sachant Y = 1

$\boldsymbol{X}$	**-2**	**0**	**1**	$\boldsymbol{E(X/Y=1)}$
$\boldsymbol{P(X=x/Y=1)}$	**2/3**	**1/3**	**0**	**-4/3**

$$P(X=-2/Y=1)=\frac{P(X=-2,Y=1)}{P(Y=1)}=$$

3- $Cov(X,Y)=E(XY)-E(X).E(Y)$

$$E(XY)=\sum_{x\in X(\Omega)}\sum_{y\in Y(\Omega)} x.y\,P(X=x,Y=y)=-0.2$$

$$E(X)=-0.6 \quad et\ E(Y)=0.2$$

$$Cov(X,Y)=-0.08\neq 0$$

Puisque la covariance est différente de 0 *, donc X et Y ne sont pas indépendantes.*

Solution de l'exercice 3.15.5

On a : : $Y/X=x \rightsquigarrow B\left(x,\frac{1}{2}\right)$

- Si $\boldsymbol{x=1}$, $Y/X=1 \rightsquigarrow B\left(1,\frac{1}{2}\right)$ ce qui donne : $Y(\Omega)=\{0\ ,1\}$

Donc : $P(Y=0/X=1)=C_1^0\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^{1-0}=\frac{1}{2} \Rightarrow$

$$P(Y=0/X=1)=\frac{P(X=1,Y=0)}{P(X=1)}=\frac{1}{2}$$

D'où : $P(X=1,Y=0)=\frac{1}{2}\,.P(X=1)=1/6$

On fait de même pour :

$P(Y=1/X=1)=C_1^1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^{1-1}=\frac{1}{2}\Rightarrow$

$$P(Y=1/X=1)=\frac{P(X=1,Y=1)}{P(X=1)}=\frac{1}{2}$$

D'où : $P(X=1,Y=1)=\frac{1}{2}\,.P(X=1)=1/6$

- Si $\boldsymbol{x}=\mathbf{2}$, $Y/X=2\rightsquigarrow B\left(2,\frac{1}{2}\right)$ ce qui donne : $Y(\Omega)=\{0\,,1,2\}$

Donc : $P(Y=0/X=2)=C_2^0\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^{2-0}=\frac{1}{4}\Rightarrow$

$$P(Y=0/X=2)=\frac{P(X=2,Y=0)}{P(X=2)}=\frac{1}{4}$$

D'où : $P(X=2,Y=0)=\frac{1}{4}\,.P(X=2)=2/12$

Pour $\boldsymbol{Y=1}$:

$$P(Y=1/X=2)=C_2^1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^{2-1}=\frac{1}{2}\Rightarrow$$

$$P(Y=1/X=2)=\frac{P(X=2,Y=1)}{P(X=2)}=\frac{1}{2}$$

D'où : $P(X=2,Y=1)=\frac{1}{2}\,.P(X=2)=2/6$

Pour $\boldsymbol{Y=2}$:

$$P(Y=2/X=2)=C_2^2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^{2-2}=\frac{1}{4}\Rightarrow$$

$$P(Y=2/X=2)=\frac{P(X=2,Y=2)}{P(X=2)}=\frac{1}{4}$$

D'où : $P(X=2,Y=2)=\frac{1}{4}\,.P(X=2)=2/12$

$On\ Déduit\ que\ Y(\Omega)=\{0,1,2\}$

Le tableau de la loi conjointe est le suivant :

Y / X	**0**	**1**	**2**	**Loi de X**
1	1/6	1/6	0	**2/6**
2	1/6	2/6	1/6	**4/6**
Loi de Y	**2/6**	**3/6**	**1/6**	**1**

1- Calculer $E(Y)$ sans passer par la loi de Y

1ère Méthode :

$$E(Y) = E\big(E(Y/X)\big) = \sum_{x=1}^{2} E(Y/X = x) \,.\, P(X = x)$$

Il faut déterminer $E(Y/X)$?

Y	**0**	**1**	**2**	$E(Y/X)$
$\boldsymbol{P(Y = y/X = 1)}$	1/2	1/2	0	$\boldsymbol{1/2 \; = \; E(Y/X = 1)}$
$\boldsymbol{P(Y = y/X = 2)}$	1/4	2/4	1/4	$\boldsymbol{1 \; = \; E(Y/X = 2)}$

Par conséquent :

$$E(Y) = E\big(E(Y/X)\big) = \sum_{x=1}^{2} E(Y/X = x) \,.\, P(X = x)$$

$$\boldsymbol{= \frac{1}{2} \,.\, P(X = 1) + 1 \,.\, P(X = 2) = \frac{1}{2} . \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = \frac{5}{6}}$$

2ème Méthode :

$$E(Y) = E\big(E(Y/X)\big) = E\left(\frac{X}{2}\right) = \frac{1}{2} E(X) = \frac{1}{2}\left[\frac{1.1}{3} + 2.\frac{2}{3}\right] = \frac{5}{6}$$

Solution de l'exercice 3.15.6 La fonction génératrice des moments de X,

$$G_X(t) = \sum_{x \in X(\Omega)} e^{tx} . P(X = x)$$

$$= 0{,}15e^{t} + 0{,}2e^{4t} + 0{,}3e^{5t} + 0{,}35e^{6t}.$$

La fonction génératrice des moments de Y, $G_Y(t) = \sum_{y \in Y(\Omega)} e^{ty} . P(Y = y)$

$$= 0{,}2e^{t} + 0{,}3e^{2t} + 0{,}5e^{6t}$$

	X=1	X=4	X=5	X=6	Loi de Y
Y=1	0.025	0.025	0.075	0.075	0.2
Y=2	0.075	0.125	0.025	0.075	0.3
Y=6	0.05	0.05	0.2	0.2	0.5
Loi de X	0.15	0.2	0.3	0.35	1

$$P(X = 1, Y = 2) = P(X = 6, Y = 2) = p$$

$$2p + 0.125 + 0.025 = 0.3 \Longrightarrow 2p = 0.3 - 0.025 - 0.125 = 0.15 \Longrightarrow p = 0.075$$

1- X et Y ne sont pas indépendantes car : $P(X = 1, Y = 1) \neq P(X = 1).P(Y = 1)$

2-

$P(Y \geq 2) = P(Y = 2) + P(Y = 6)$ =0.8

$$P(Y \geq 2/X = 1) = \frac{P(Y \geq 2, X = 1)}{P(X = 1)} = \frac{P(Y = 2, X = 1) + P(Y = 6, X = 1)}{0.15} =$$

$$= \frac{0.075 + 0.05}{0.15} = 0.83$$

Solution de l'exercice 3.15.7

$$Y(\Omega) = \{26, 5, 1, 5, 26\} =$$

X \ Y	**1**	**5**	**26**
-5	0	0	1/10
-2	0	7/30	0
0	1/3	0	0
2	0	7/30	0
5	0	0	1/10

$$Y = X^2 + 1$$

$1 \neq -5^2 + 1$ $5 \neq -5^2 + 1$ $26 = -5^2 + 1$

Solution de l'exercice 3.15.8

1- $P(X = Y) = \sum_{x \in X(\Omega)} P(X = x, Y = x) \quad puisque\ X = Y$

$$= \sum_{x\geq 1} pq^{x-1}.pq^{x-1} = p^2 \sum_{x\geq 1} (q^2)^{x-1} = \frac{p^2}{q^2} \sum_{x\geq 1} (q^2)^x = \frac{p^2}{q^2} \cdot \frac{q^2}{1-q^2} = \frac{p^2}{1-q^2}$$

2-

$$P(X = x) = \sum_{y\geq 1} P(X = x, Y = y)$$

$$P(X < Y) = \sum_{y\geq 1} P(X < y, Y = y)$$

$$P(X < y) = P(X \leq y - 1) = 1 - q^{y-1}$$

$$Donc\colon\ P(X < Y) = \sum_{k\geq 1} (1 - q^{k-1})(pq^{k-1}) = \sum_{k\geq 1} pq^{k-1} - (q^2)^{k-1}$$

$$= \frac{p}{q} \sum_{k\geq 1} q^k - \frac{p}{q^2} \sum_{k\geq 1} (q^2)^k =$$

$$= \frac{p}{q} \frac{q}{1-q} - \frac{p}{q^2} \frac{q^2}{1-q^2} = 1 - \frac{p}{1-q^2} = \frac{1-q^2-p}{1-q^2} = \frac{q-q^2}{1-q^2} = \frac{q(1-q)}{(1-q)(1+q)} = \frac{q}{1+q}$$

Solution de l'exercice 3.15.9

1- $P(X = x, Y = y) = c|x - y|$, $x \in \{0,1\}$ et $y \in \{-1,0,1\}$

$$\sum_{y=-1}^{1} \sum_{x=0}^{1} P(X = x, Y = y) = 1 \Leftrightarrow \text{c} \sum_{y=-1}^{1} |-y| + |1 - y| = 1 \Leftrightarrow \text{c}(1 + |2| + 1 + 1) = 1 \Leftrightarrow 5\text{c}$$

$$= 1 \Leftrightarrow \text{c} = \frac{1}{5}$$

La loi du couple $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$:

	$\boldsymbol{Y = -1}$	$\boldsymbol{Y = 0}$	$\boldsymbol{Y = 1}$	Loi de X
$\boldsymbol{X = 0}$	1/5	0	1/5	2/5
$\boldsymbol{X = 1}$	2/5	1/5	0	3/5
Loi de Y	3/5	1/5	1/5	1

$P(X = x, Y = y) = \frac{1}{5}|x - y|$

$P(X=0,Y=-1)=\frac{1}{5}|0-(-1)|=\frac{1}{5}$

4-La fonction de répartition $F(x,y)$:

1er Cas : $\boldsymbol{x<0 \ ou\ y<-1}$: $\boldsymbol{F(x,y)=0}$

2ème Cas : $\boldsymbol{0\le x<1\ et -1\le y<0}$

$$F(x,y)=P(X=0,Y=-1)=\frac{1}{5}$$

3 ème Cas: $\boldsymbol{0\le x<1\ \ et}\ 0\le y<1$

$$F(x,y)=\ P(X=0,Y=-1)+P(X=0,Y=0)=\frac{1}{5}$$

4 ème Cas: $\boldsymbol{0\le x<1\ \ et\ \ y\ge 1}$

$$F(x,y)=P(X=0,Y=-1)+P(X=0,Y=0)+P(X=0,Y=1)=\frac{2}{5}$$

5 ème Cas: $\boldsymbol{x\ge 1}\ \ et\ -1\le y<0$

$$F(x,y)=P(X=0,Y=-1)+P(X=1,Y=-1)=\frac{3}{5}$$

6 ème Cas: $\boldsymbol{x\ge 1}\ \ et\ \ 0\le y<1$

$$F(x,y)=P(X=0,Y=-1)+P(X=1,Y=-1)+P(X=1,Y=0)+P(X=1,Y=-1)$$
$$=\frac{4}{5}$$

7 ème Cas: $x\ge 1\ \ et\ \ y\ge 1$

$$F(x,y)=1$$

$$\boldsymbol{F(x,y)}=\begin{cases}\boldsymbol{0} & , \quad \boldsymbol{x<0\ ou\ y<-1}\\ \boldsymbol{\frac{1}{5}} & , \quad \boldsymbol{0\le x<1\ et-1\le y<0}\\ \boldsymbol{\frac{1}{5}} & , \quad \boldsymbol{0\le x<1\ \ et\ 0\le y<1}\\ \boldsymbol{\frac{2}{5}} & , \quad \boldsymbol{0\le x<1\ \ et\ \ y\ge 1}\\ \boldsymbol{\frac{3}{5}} & , \quad \boldsymbol{x\ge 1\ \ et\ \ -1\le y<0}\\ \boldsymbol{\frac{4}{5}} & , \quad \boldsymbol{x\ge 1\ \ et\ 0\le y<1}\\ \boldsymbol{1} & , \quad \boldsymbol{x\ge 1\ \ et\ y\ge 1}\end{cases}$$

$$F(x)=\lim_{y\to+\infty}F(x,y)=\begin{cases}0 & si\quad x<0\\ \frac{2}{5} & si\quad 0\le x<1\\ 1 & si\quad x\ge 1\end{cases}$$

$$F(y) = \lim_{x \to +\infty} F(x,y) = \begin{cases} 0 \quad si \qquad y < -1 \\ \frac{3}{5} \quad si \quad -1 \leq y < 0 \\ \frac{4}{5} \quad si \qquad 0 \leq y < 1 \\ 1 \quad si \qquad y \geq 1 \end{cases}$$

5-

Déduire $F(0.5\,;0.5) = \frac{1}{5}$

Calculer $P\left[\left(X < \frac{1}{2}\right) \cap (Y > -1)\right] = P(X = 0, Y = 0) + P(X = 0, Y = 1) = 0 + \frac{1}{5} = \frac{1}{5}$

$$P[(X \leq 0.5) \cap (Y = 0.5)] = 0$$

6-

$$X \text{ et } Y \text{ ne sont pas indépendantes car } P(X = x, Y = y) \neq P(X = x) * P(Y = y)$$

7- $Cov(X,Y) = E(X.Y) - E(X).E(Y) = -\frac{4}{25}$

$$E(X.Y) = -\frac{2}{5} \quad ; \quad E(X) = \frac{3}{5} \quad ; \quad E(Y) = -\frac{2}{5}$$

8- $E(e^Y) = \sum_{y=-1}^{1} e^Y P(Y = y) = e^{-1}P(Y = -1) + P(Y = 0) + e^1 P(Y = 1) =$

$$= \frac{3}{5}e^{-1} + \frac{1}{5} + e.\frac{1}{5} =$$

$$E(e^Y) = 0.96$$

Calculer $\boldsymbol{E(Y/X = 0)}$ **:**

$\boldsymbol{y}$	**-1**	**0**	**1**	$\boldsymbol{E(Y/X = 0)}$
$\boldsymbol{P(Y/X = 0)}$	**1/2**	**0**	**1/2**	**0**

9-

$\boldsymbol{x}$	**0**	**1**	$\boldsymbol{E(X/Y = 0)}$
$\boldsymbol{P(X/Y = 0)}$	**0**	**1**	**1**

11- la loi de Z=X+Y :

$\boldsymbol{z}$	$\boldsymbol{-1}$	**0**	**1**	**2**
$\boldsymbol{P(Z = z)}$	**1/5**	**2/5**	**2/5**	**0**

Solution de l’exercice 3.15.10

la loi conjointe $P_{XY}(x,y)$ est obtenue à partir de la relation :

$$F_{X,Y}(a,b) = P(X \leq a, Y \leq b) = \sum\nolimits_{x \leq a} \sum\nolimits_{y \leq b} P_{XY}(x,y)$$

Ainsi :

$$F_{X,Y}(1,1) = P_{XY}(1,1) = 1/8$$

$$F_{X,Y}(1,2) = P_{XY}(1,1) + P_{XY}(1,2) = \frac{5}{8} \Longrightarrow P_{XY}(1,2) = \frac{4}{8}$$

$$F_{X,Y}(2,1) = P_{XY}(1,1) + P_{XY}(2,1) = \frac{2}{8} \Longrightarrow P_{XY}(2,1) = \frac{1}{8}$$

$$F_{X,Y}(2,2) = P_{XY}(1,1) + P_{XY}(1,2) + P_{XY}(2,1) + P_{XY}(2,2) = 1 \Longrightarrow P_{XY}(2,2) = \frac{2}{8}$$

la loi conjointe $P_{XY}(x,y)$ devient :

	Y=1	**Y=2**	**Loi de X**
X=1	**1/8**	**1/2**	**5/8**
X=2	**1/8**	**1/4**	**3/8**
Loi de Y	**1/4**	**3/4**	**1**

Chapitre 4

4 Couples de variables aléatoires continues

Au chapitre 2, nous avons présenté les variables aléatoires continues. Pour simplifier les choses, nous avons mentionné que lorsque nous passons des variables aléatoires discrètes aux variables aléatoires continues, deux choses se produisent : les sommes deviennent des intégrales et les Probabilités deviennent des densités. La même chose peut être répétée lorsque nous parlons de distributions conjointes : les (doubles) sommes deviennent des (doubles) intégrales, et les lois conjointes deviennent des densités conjointes. Notez que la fonction de répartition a la même définition pour tous les types de variables aléatoires. L'expérience montre que les étudiants peuvent généralement apprendre sans trop de difficultés les concepts qui sous-tendent les variables aléatoires continues conjointes ; cependant, ils rencontrent parfois des problèmes lorsqu'ils traitent des intégrales doubles. En d'autres termes, lors de la discussion sur les distributions continues conjointes, les problèmes des étudiants sont souvent liés au calcul à plusieurs variables plutôt qu'à leur manque de compréhension des concepts de probabilité. La bonne nouvelle est que, dans la pratique, nous n'avons pas souvent besoin d'évaluer des intégrales multiples. Néanmoins, comme cette partie repose sur une bonne connaissance du calcul à plusieurs variables, nous vous recommandons de revoir rapidement les intégrales doubles et les dérivées partielles au cas où vous ne les auriez pas abordées récemment. Nous n'aurons que très peu besoin des concepts de calcul et notre objectif ici est de nous concentrer sur les probabilités. Dans cette section, nous discuterons des distributions continues conjointes. Comme les idées qui sous-tendent la théorie sont très analogues à celles des variables aléatoires discrètes conjointes, nous présenterons rapidement les principaux concepts, puis nous nous concentrerons sur des exemples.

4.1 Densité de probabilité conjointe

Nous définirons ici les variables aléatoires conjointement continues. Fondamentalement, deux variables aléatoires sont conjointement continues si elles ont une densité de probabilité conjointe telle que définie ci-dessous.

4.1.1 Définition

On appelle fonction de densité de probabilité conjointe du couple$(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$, la fonction positive $\boldsymbol{f(x,y)}$ définie sur $\mathbb{R}^{\mathbf{2}}$ si elle vérifie :

$$f_{X,Y}(x,y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy=1$$

4.2 Densités marginales :

Les densités marginales de $\boldsymbol{X}$ et $\boldsymbol{Y}$ sont données respectivement par :

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy \quad \text{et} \quad f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx$$

Remarque 4.2.1 Si (X,Y) un couple de v.a. continue alors : $\forall\ (X,Y)\ \in\mathbb{R}^2$:

$$P(X=x,Y=y)=P(X\leq x,Y=y)=P(X=x,Y\leq y)=\cdots\ldots\ldots\ldots\ldots=0$$

4.3 Indépendance de deux variables aléatoires continues

$$\boldsymbol{X} \textbf{ et } \boldsymbol{Y} \textbf{ sont indépendantes} \Leftrightarrow \boldsymbol{f(x,y)=f_X(x)\,.\,f_Y(y)}$$

Exemple

$$f(x,y)=\begin{cases}kxe^{-x}e^{-2y} & x,y>0\\ 0\quad , & sinon\end{cases} \qquad k\ un\ réel\ positif$$

1- Déterminer les densités marginales de X et Y.
2- X et Y sont-elles indépendantes ?

Solution

1- $$f(x,y)=\begin{cases}2xe^{-x}e^{-2y} & x,y>0\\ 0\quad , & sinon\end{cases}$$

$$f(x,y)=2e^{-2y}.xe^{-x}\quad ,\qquad x,y>0$$

$$f_{X,Y}(x,y)=f(x).f(y)$$

$$f_X(x) = xe^{-x} \ , \ \ x > 0$$

$$f_Y(y) = 2e^{-2y} \ \ , \ \ y > 0$$

2- Comme $f_{X,Y}(x,y) = f(x).f(y)$ on conclut que $X\ et\ Y$ sont indépendantes

4.4 Fonction de répartition d'un couple continue

Soit (X,Y)un couple de variable aléatoire continue

On appelle $F_{X,Y}(x,y)$ fonction de répartition du couple (X,Y) est définie par :

$$\forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : F_{X,Y}(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y) = \int_{-\infty}^{y} \left[\int_{-\infty}^{x} f(u,v)du\right] dv$$

$$= \int_{-\infty}^{x} \left[\int_{-\infty}^{y} f(u,v)dv\right] du$$

$C'est\ une\ fonction\ continue\ admettant\ des\ dérivées\ secondes\ continues\ et\ on\ a$:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x,y) = f(x,y)$$

$L'ordre\ de\ dérivation\ n'a\ pas\ d'importance; d'aprés\ le\ théorème\ Schwarz\ en\ tout\ point\ (x,y)$

$ou\ les\ dérivées\ partielles\ secondes\ sont\ continues\ on\ a$:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x,y)$$

4.5 Fonctions de répartition marginales

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{x} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(u,v)dv\right] dx = \lim_{y \to +\infty} F(x,y)$$

$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^{y} f(t)dt = \int_{-\infty}^{y} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(u,v)du\right] dv = \lim_{x \to +\infty} F(x,y)$$

Exemple Soit (X,Y)un couple de variable aléatoire continue de densité

$$f(x,y) = x + y \ \ , \ \ (x,y) \in [0,1] \times [0,1]$$

Déterminer la fonction de répartition de (X,Y).

Solution

1er Cas : $\boldsymbol{x < 0\ ou\ y < 0}$: $\boldsymbol{F(x,y) = 0}$

2ème Cas : $\boldsymbol{0 \leq x < 1\ et\ 0 \leq y < 1}$

$$F(x,y)=\int_0^y\left[\int_0^x(u+v)du\right]dv=\int_0^y\left[\frac{u^2}{2}+vu\right]_0^x dv=\int_0^y\left(\frac{x^2}{2}+vx\right)dv$$
$$=\frac{yx^2}{2}+x\frac{y^2}{2}$$

3 ème Cas: $\boldsymbol{0\leq x<1\ \ et\ \ y\geq 1}$

$$F(x,y)=\int_0^1\left[\int_0^x(u+v)du\right]dv=F(x,1)=\frac{x}{2}(x+1)$$

4 ème Cas: $\boldsymbol{x\geq 1}\ \ et\ \boldsymbol{0\leq y<1}$

$$F(x,y)=\int_0^1\left[\int_0^y(u+v)dv\right]du=F(1,y)=\frac{y}{2}(y+1)$$

5 ème Cas: $\boldsymbol{x\geq 1}\ \ et\ \ \boldsymbol{y\geq 1}$

$$F(x,y)=\int_0^1\left[\int_0^1(u+v)dv\right]du=F(1{,}1)=1$$

$$F(x,y)=\begin{cases}0 & , \quad x<0\ ou\ y<0\\ \frac{yx^2}{2}+x\frac{y^2}{2} & , \quad 0\leq x<1\ et\ 0\leq y<1\\ \frac{x}{2}(x+1) & , \quad 0\leq x<1\ \ et\ \ y\geq 1\\ \frac{y}{2}(y+1) & , \quad x\geq 1\ et\ 0\leq y<1\\ 1 & , \quad x\geq 1\ \ et\ \ y\geq 1\end{cases}$$

$$F(x)=\begin{cases}0 & si\quad x<0\\ \frac{x}{2}(x+1) & si\quad 0\leq x<1\\ 1 & si\quad x\geq 1\end{cases}$$

$$F(y)=\begin{cases}0 & si\quad y<0\\ \frac{y}{2}(y+1) & si\quad 0\leq y<1\\ 1 & si\quad y\geq 1\end{cases}$$

4.6 Lois Conditionnelles

4.6.1 Définition On appelle densité conditionnelle de X sachant $Y=y$ la fonction notée :

$$f_{X/Y=y}(x) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} \quad , \quad f_Y(y) \neq 0$$

$$f_{X/Y=y} \; est \; positive, continue \; et \; \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X/Y=y} dx = 1$$

Et la densité conditionnelle de Y sachant $X = x$ la fonction notée :

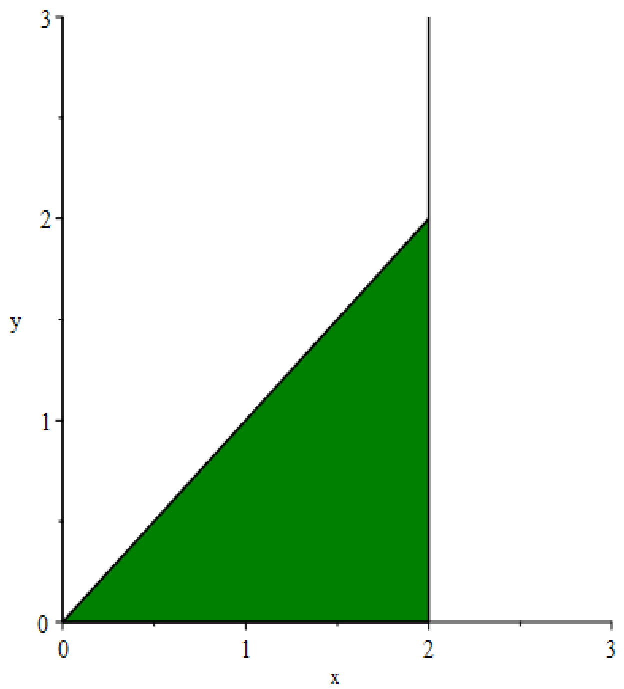
$$f_{Y/X=x}(y) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} \quad , \quad f_X(x) \neq 0$$

Exemple $\quad f(x,y) = \frac{x.y}{2} \quad ,0 \leq x \leq 2 \quad et \quad 0 \leq y \leq x$

Déterminer la loi conditionnelle de Y sachant $X = x$ et la loi de Y sachant $X = x$

Corrigé

Support de *f*



D'abord il faut déterminer les densités marginales :

$f_X(x) = \int_0^x \frac{xy}{2} dy = \frac{x^3}{4}$, $0 \leq x \leq 2$

$$f_Y(y) = \int_y^2 \frac{xy}{2}\, dx = \frac{y}{4}\,(4-y^2)\,, \quad 0 \leq y \leq 2$$

$$\forall\, y \in \; [0\,,2], \quad f_{X/Y=y}(x) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{x.y}{2.\frac{y}{4}\,(4-y^2)} = \frac{2x}{4-y^2} \qquad , \quad y \leq x \leq 2$$

$$\forall\, x \in \; [0\,,2], \qquad f_{Y/X=x}(y) = \frac{f(x,y)}{f_X(y)} = \frac{x.y}{\frac{x^3}{4}} = \frac{2y}{x^2} \qquad , \qquad 0 \leq y \leq x$$

4.7 Espérances et Espérance Conditionnelles

1- Soit $g\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, si $E\big(g(X,Y)\big) existe\ alors$:

$$E\big(g(X,Y)\big) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y)f(x,y)dxdy$$

En particulier : $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x,y)dxdy = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$

2- Les moments d'ordres p,q est donnée par :

$$E(X^pY^q) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x^p y^q f(x,y)dxdy$$

En particulier : $E(XY) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xyf(x,y)dxdy$

4.7.1 Définition

On appelle espérance conditionnelle de $\boldsymbol{X}$ sachant $(\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{y})$ la variable aléatoire donnée par :

$$E(X/Y = y) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf_{X/Y=y}(x)dx$$

De la même manière on définit l'espérance conditionnelle de X sachant $(X = x)$sachant $(Y = y)$ la variable aléatoire donnée par :

$$E(Y/X = x) = \int_{-\infty}^{+\infty} yf_{Y/X=x}(y)dy$$

4.8 Transformation de couples aléatoires continues

Soit (X,Y)un couple aléatoire de densité $f_{X,Y}$, on se propose de déterminer la densité du couple $(U,V) = \big(\varphi_1(X,Y), \varphi_2(X,Y)\big)$

On considère l'application $\varphi\colon \Delta \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow D \subset \mathbb{R}^2$

$$(X,Y) \longmapsto \varphi(X,Y) = (U,V)$$

Supposée de classe C^1.

Le couple $(U,V) = \varphi(X,Y)$ admet pour densité :

$$f_{(U,V)}(u,v) = f_{(X,Y)}(\varphi^{-1}(u,v)).\left|J_{\varphi^{-1}}\right|$$

Ou $J_{\varphi^{-1}} = le\ déterminant\ de\ la\ matrice\ jacobienne$

$$J_{\varphi^{-1}} = \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial U} & \frac{\partial X}{\partial V} \\ \frac{\partial Y}{\partial U} & \frac{\partial Y}{\partial V} \end{vmatrix}$$

Exemple $f_{X,Y}(x,y) = e^{-(x+y)}$, $x > 0\ \ et\ y > 0$

Déterminer la loi du couple $(X+Y, X-Y)$

On pose :$U = X + Y,\ V = X - Y$

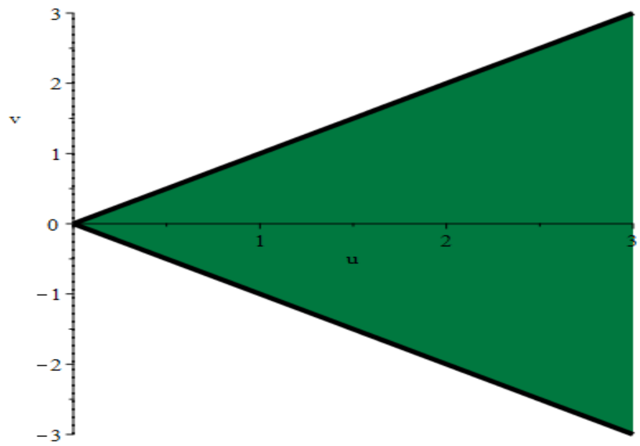
$$\varphi: \begin{cases} U = X + Y \\ V = X - Y \end{cases} \Leftrightarrow \varphi^{-1} = \begin{cases} X = \frac{U+V}{2} \\ Y = \frac{U-V}{2} \end{cases}$$

$$J_{\varphi^{-1}} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}$$

$$f_{U,V}(u,v) = f_{(X,Y)}(\varphi^{-1}(u,v)).\left|J_{\varphi^{-1}}\right|$$

$$= f_{(X,Y)}\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right).\frac{1}{2} = \frac{1}{2}e^{-u}$$

$$f_{U,V}(u,v) = \frac{1}{2}e^{-u}\ \ , v < u\ \ et\ v > -u$$



Les lois marginales de U et V

$$f_U(u) = \frac{1}{2}e^{-u}\int_{-u}^{u} dv = ue^{-u}\ ,\ \ u > 0$$

$$f_V(v) = \begin{cases} \int_{v}^{+\infty} \frac{1}{2}e^{-u}du\ , & v > 0 \\ \int_{-v}^{+\infty} \frac{1}{2}e^{-u}\ , & v < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-v} & , v > 0 \\ \frac{1}{2}e^{v}\ , & v < 0 \end{cases}$$

$$= \frac{1}{2}e^{-|v|}\ , v > 0$$

4.9 Loi de la somme de deux variables aléatoires continues

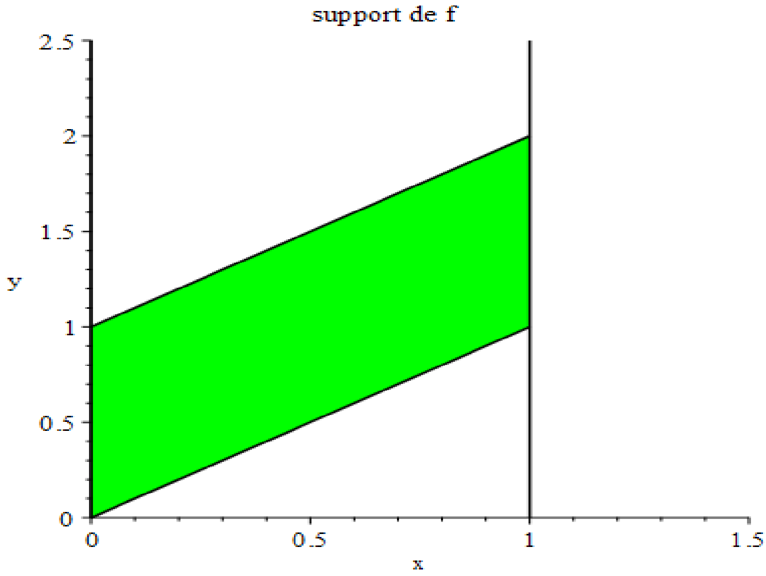
4.9.1 Définition : Soient X et Y deux v.a. indépendantes continues de densité respectivement f_X et f_Y alors :

$X + Y$ est continues de densité :

$$f_Z(z) = f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x).f_Y(z-x)dx$$

Exemple

a- Somme de 2 lois Uniformes indépendantes sur $[\mathbf{0}, \mathbf{1}]$



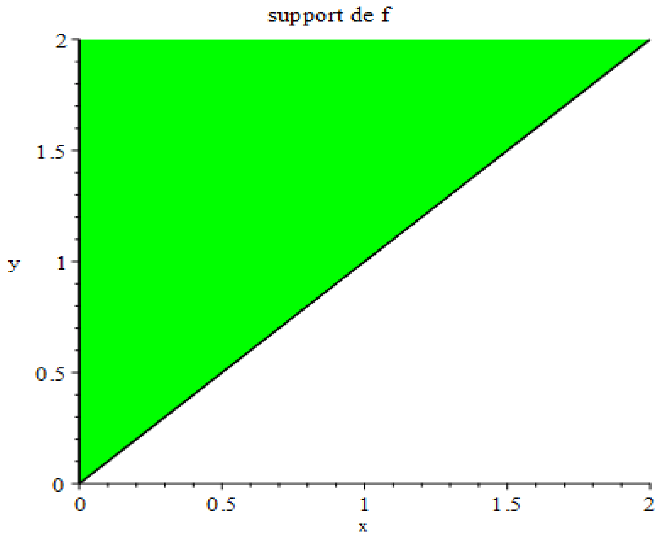
1er Cas : $0 \leq z \leq 1$: $f_Z(z) = \int_0^z dx = z$

2ème Cas : $1 \leq z \leq 2$: $f_Z(z) = \int_{z-1}^1 dx = 2 - z$

$$f_Z(z) = \begin{cases} 0 \ , & z < 0 \\ z \ , & 0 \leq z \leq 1 \\ 2 - z \ , & 1 \leq z \leq 2 \\ 0 \ , & z \geq 2 \end{cases}$$

b- Somme de 2 lois exponentielle indépendantes :

$$X \sim Exp(\lambda) \ \ et \ Y \sim Exp(\lambda)$$



$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x).f_Y(z-x)dx = \lambda^2 e^{-\lambda z}\int_0^z dx \quad , \quad z \geq 0$$

$$= \frac{\lambda^2 z e^{-\lambda z}}{\Gamma(2)} \quad , \qquad z \geq 0$$

$$Donc:\ Z = X + Y \rightsquigarrow \gamma(2,\lambda)$$

$c-$ **Somme de lois Normales Centrées réduites :**

$$X \rightsquigarrow N(0,1)\ \ et\ Y \rightsquigarrow N(0,1)$$

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} . \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z-x)^2}{2}} dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(x^2+z^2-2zx+x^2)}dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(2x^2+z^2-2zx)}dx = \frac{1}{2\pi}\int e^{-\left(x^2-zx+\frac{z^2}{2}\right)}dx = \frac{1}{2\pi}\int e^{-\left[\left(x-\frac{z}{2}\right)^2+\frac{z^2}{4}\right]}dx$$

$$= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{z^2}{4}} \int e^{-\left(x-\frac{z}{2}\right)^2} dx = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{z^2}{4}} \int e^{-u^2} du = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} . e^{-\frac{z^2}{4}} , \ \ z \in \mathbb{R}$$

On reconnait la densité d'une loi normale de moyenne 0 et de variance 1

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = 2\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \int_0^{+\infty} u^{-\frac{1}{2}}e^{-u}du = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

Résultas

$$X \rightsquigarrow \gamma(a_1,b)\ et\ Y \rightsquigarrow \gamma(a_2,b)\ \ alors\ \ X+Y \rightsquigarrow \gamma(a_1+a_2,b)$$

$$X \rightsquigarrow N(m_1,\sigma_1^2)\ et\ Y \rightsquigarrow N(m_2\,,\sigma_2^2)\ \ alors\ \ X+Y \rightsquigarrow N(m_1+m_2\,,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$$

4.10 Exercices

4.10.1 Exercice Soient $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ un couple de variables aléatoires continues de densité définie par :

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \frac{|\boldsymbol{x}|}{\sqrt{8\boldsymbol{\pi}}} \boldsymbol{exp}\left(-|\boldsymbol{x}| - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{x}^2\boldsymbol{y}^2\right) \quad \boldsymbol{si}\ \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}$$

La distribution conditionnelle de Y sachant $X = x$ est une distribution Normal de paramètres $m = 0\ et\ \sigma^2 = x^{-2}$.

$$f_{Y/X=x}(y) = \frac{1}{\frac{1}{|\boldsymbol{x}|}\sqrt{2\pi}} exp - \frac{1}{2}\left(\frac{y^2}{\frac{1}{x^2}}\right) = \frac{|\boldsymbol{x}|}{\sqrt{2\pi}} exp - \frac{1}{2}(x^2y^2)$$

a) Trouver la densité marginale de X ?
b) Calculer la function de répartition de X ?
c) Trouver $E(X)$ et $V(X)$.

4.10.2 Exercice Soient $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ un couple de variables aléatoires continues définie sur $]0,1[\times]1,e[$ de densité définie par :

$$f(x, y) = k\frac{x}{y} \quad si\ \ (x, y) \in [0,1] \times [1, e]$$

1- Déterminer la constante k, pour que f soit une densité de probabilité.
2- Calculer $P(X = 1, Y < 2), P\left(X > \frac{1}{2}, Y > 2\right)$
3- Déterminer la fonction de répartition $F_{X,Y}(x, y)$ ensuite déduire $P\left(\left(\frac{1}{4} \leq X \leq 1/2\right) \cap (1 \leq Y \leq 2)\right)$.
4- Vérifiez que , $P\left(X > \frac{1}{2}, Y > 2\right) \neq 1 - P\left(X \leq \frac{1}{2}, Y \leq 2\right)$

4.10.3 Exercice Soient $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ un couple de variables aléatoires continues de densité

$$f(x, y) = k(x + y)\ , \qquad 0 \leq x \leq 1\ et - 1 \leq y \leq 1$$

1- Déterminer la constante k.
2- Déterminer la loi marginale de Y.
3- Déterminer la densité conditionnelle de X sachant $Y = y$.
4- Calculer $P\left(X < \frac{1}{2} / Y = 0\right)\ \ et\ E(2X/Y = 0)$.

4.10.4 Exercice Soient $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ un couple de variables aléatoires continues de densité

$$f(x,y) = 24xy \quad , \quad 0 < x < 1 \ \ et\ 0 < y < 1 - x$$

Calculer $P(Y < X/X = 1/3)$.

4.10.5 Exercice _ La densité de $\boldsymbol{X}$ est donnée par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & 0 \le x \le 2 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

Et Y sachant $X = x$ est uniformément distribué sur $[x, 2x]$.

1- Déterminer la loi jointe $f(x,y)$.
2- Trouver $P(Y < 1)$.
3- Calculer $E(Y)$.

4.10.6 Exercice Soient $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ un couple de variables aléatoires continues de densité

$$\boldsymbol{f(x,y)} = \begin{cases} \boldsymbol{6e^{-(2x+3y)}} & \boldsymbol{x, y \ge 0} \\ \boldsymbol{0} \quad , & \boldsymbol{sinon} \end{cases}$$

1- $X\ et\ Y\ sont\ elles\ indépendantes$?
2- Trouvez $E(Y/X > 2)$.
3- Trouvez $P(X > Y)$.

4.10.7 Exercice Soient $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ un couple de variables aléatoires continues de densité

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{8}{3}xy & 0 \le x \le 1 \ , \quad x \le y \le 2x \\ 0 & sinon \end{cases}$$

Calculer la covariance de X et Y.

4.10.8 Exercice Soit

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & 0 < |y| < x < 1 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

Déterminer $E(X/Y)$ et $E(Y/X)$

4.10.9 Exercice Soit $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ un couple de variables aléatoires de fonction de répartition :

$$\boldsymbol{F(x,y)} = \begin{cases} \boldsymbol{1 - e^{-x} - e^{-by} + e^{-(x+by)}} & \boldsymbol{si \quad x \ge 0\ et\ y \ge 0 \quad avec\ b > 0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{sinon} \end{cases}$$

1- Pour cette on pose $b = 1$. Calculer les probabilités suivantes :

$$P\big((X = 1) \cap (Y \le 2)\big) \ ; \ P\big((X \le 2) \cap (Y \le 2)\big) \ ; \ P(X \le 1)$$

2- Déterminer $F_X(x)\ et\ \ F_Y(y)$. que peut-on déduire du couple (X, Y).

On considère pour la suite : $b = 2$.

3- Déterminer la densité du couple (X, Y).déduire la loi de X.
4- Déterminer la densité conditionnelle de Y sachant que $X = 1$. Assurez-vous de l'indépendance de $Xet\ Y$.
5- Calculer : $P(X \le Y \le 1)$

6- Déterminer la loi de $\frac{1}{Y}$.

4.10.10 Exercice

Soit la fonction jointe des deux variables aléatoires X et Y :

$$f(x,y) = \frac{2}{x}e^{-2x} \ , \qquad x > 0\ ,\ \ 0 < y \leq x$$

1- Trouver la loi marginale de X. De quelle loi usuelle s'agit-il ?
2- Trouver la loi conditionnelle de Y sachant $X = x$. De quelle loi usuelle s'agit-il ?
3- Calculer $E(Y^2 + 2X/X = 2)$
4- Calculer $E(Y)$.
5- Calculer $P(X + Y \leq 8\ ,\ \ X \leq 4)$.

4.10.11 Exercice

Soit $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$un couple aléatoire de densité

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} e^{-y} & si \quad 0 \leq x \leq y \\ 0 & sinon \end{cases}$$

Déterminer la loi de la variable aléatoire $V = X + Y$ en passant par la loi du couple $(X, X+Y)$et la loi de $(X, X-Y)$

4.10.12 Exercice

$$\boldsymbol{f_{X,Y}(x,y) = 1\ ,\ \ (x,y) = [0,1]^2}$$

Déterminer la loi de $(U,V) = (X^2, Y^2)$.

4.10.13 Exercice

Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires de densité :

$$\boldsymbol{f(x,y) = \begin{cases} ke^{-\theta y} & si \qquad 0 \leq x \leq y \\ 0 & \qquad\qquad sinon \end{cases}}$$

1- Déterminer la valeur de la constante k.
2- Déterminer les lois marginales de X et Y. ces deux variables sont-elles indépendantes ?
3- Calculer $P(X \leq 1, Y \leq 1) et\ P(X \leq 1/Y \leq 1)$.
4- Calculer la densité de probabilité du vecteur $(X, Y-X)$ et montrer que $X\ et$ $Y - X\ sont\ indépendantes$.

4.11 Solution des exercices

Solution de l'exercice 4.10.1

$$f_{Y/X=x}(y) = \frac{f(x,y)}{f(x)} \Longrightarrow f(x) = \frac{f(x,y)}{f_{Y/X=x}(y)} = \frac{\boldsymbol{\frac{|x|}{\sqrt{8\pi}} exp\left(-|x| - \frac{1}{2}x^2y^2\right)}}{\frac{|x|}{\sqrt{2\pi}} exp - \frac{1}{2}(x^2y^2)}$$

$$= \frac{1}{2} e^{-|x|}$$

$$f(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|} \quad , \qquad x \in \mathbb{R}$$

2ème Méthode

$$f(x) = \int f(x,y)dy = \frac{\boldsymbol{|x|}}{\boldsymbol{\sqrt{8\pi}}} \boldsymbol{e}^{-|x|} \int e^{-\frac{1}{2}x^2y^2} dy$$

On a

$$\int f_{Y/X=x}(y)\, dy = 1$$

alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{e^{-\frac{1}{2}x^2y^2} dy} = \frac{\boldsymbol{\sqrt{2\pi}}}{\boldsymbol{|x|}}$$

C'est pourquoi

$$f(x) = \int f(x,y)dy = \frac{\boldsymbol{|x|}}{\boldsymbol{\sqrt{8\pi}}} \boldsymbol{e}^{-|x|} \int e^{-\frac{1}{2}x^2y^2} dy = \frac{\boldsymbol{|x|}}{\boldsymbol{\sqrt{8\pi}}} \boldsymbol{e}^{-|x|} * \frac{\boldsymbol{\sqrt{2\pi}}}{\boldsymbol{|x|}}$$

D'ou

$$f(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|} \quad , \qquad x \in \mathbb{R}$$

a) $F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{x} & , \ x < 0 \\ \frac{1}{2} e^{-x} & , \ x \geq 0 \end{cases}$

b) $E(X) = \int x f(x) dx = 0 \ \ (f \ is \ a \ pair \ function)$

$E(X^2) = 2 \int_0^{\infty} \frac{x^2}{2} e^{-x} = 2 \ \ we \ deduce \ that \ V(X) = 2$

Solution de l'exercice 4.10.2

$$f(x,y) = \begin{cases} k.\frac{x}{y} & , \ \ (x,y) \in [0,1] \times [1,e] \\ 0 & , \qquad \qquad sinon \end{cases}$$

1- $k \int_0^1 \int_1^e \frac{x}{y} dxdy = 1 \Leftrightarrow k = 2$

2- $f(x,y) = \begin{cases} 2.\frac{x}{y} & , \ \ (x,y) \in [0,1] \times [1,e] \\ 0 & , \qquad \qquad sinon \end{cases}$

$$P(X = 1, Y < 2) = 0$$

$$P\left(X > \frac{1}{2} \ , Y > 2\right) = \int_{1/2}^{1}\int_{2}^{e} \frac{2x}{y} dxdy = \frac{3}{4}(1 - Ln2) = 0.23$$

Ou bien en utilisant $F(x, y)$

$$P\left(X > \frac{1}{2} \ , Y > 2\right) = 1 - P\left(\left(X \leq \frac{1}{2}\right) \cup (Y \leq 2)\right)$$

$$= 1 - \left(F_X\left(\frac{1}{2}\right) + F_Y(2) - F_{X,Y}\left(\frac{1}{2}, 2\right)\right)$$

$$= 1 - \left(\frac{1}{4} - Ln2 + \frac{1}{4}Ln2\right) = 0.23$$

Sachant que :

$$F_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 0 & si & x < 0 \ ou \ y < 1 \\ x^2 & si & 0 \leq x < 1 \,, y > e \\ x^2 Ln(y) & si & 0 \leq x < 1{,}1 \leq y < e \\ Ln(y) & si & x > 1{,}1 \leq y < e \\ 1 & si & , \quad x > 1 \,, y > e \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 \,, & x < 0 \\ x^2, & 0 \leq x < 1 \\ 1 \,, & x \geq 1 \end{cases} \qquad F(y) = \begin{cases} 0 \,, & y < 0 \\ Lny, & 1 \leq y < e \\ 1 \,, & y \geq e \end{cases}$$

$$P\left(\frac{1}{4} \leq X \leq \frac{1}{2} \ , 1 \leq Y \leq 2\right) = F\left(\frac{1}{2}, 2\right) - F\left(\frac{1}{4}, 2\right) - F\left(\frac{1}{2}, 1\right) + F\left(\frac{1}{4}, 1\right) = 0.17 - 0.04 = 0.13$$

Solution de l'exercice 4.10.3

$k = 1.$

1- $f_Y(y) = \int_0^1 (x + y)dx = \frac{1}{2} + y \ , \quad -1 \leq y \leq 1$

2- $f_{X/Y=y}(x) = \frac{x+y}{\frac{1}{2}+y} \ , \ 0 \leq x \leq 1$

3- $P\left(X < \frac{1}{2} / \ Y = 0\right) = \int_0^{1/2} f_{X/Y=0}(x)dx = \int_0^{1/2} \frac{x+0}{\frac{1}{2}+0} dx = [x^2]_0^{1/2} = \frac{1}{4}$

$$E(2X/Y = 0) = 2E(X/Y = 0) = 2\int_0^1 x * \frac{x}{\frac{1}{2}} dx = 4\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{4}{3}$$

Solution de l'exercice 4.10.4

Notez que la probabilité de calculer $P(Y < X/X = 1/3)$ est identique à $P(Y < 1/3/X = 1/3)$.

Pour calculer la probabilité ultérieure, nous devons d'abord calculer

$$f_{Y/X=3}(y)=\frac{f\left(\frac{1}{3},y\right)}{f_X\left(\frac{1}{3}\right)}=\frac{24.\frac{1}{3}.y}{\int_0^{1-\frac{1}{3}}f\left(\frac{1}{3},y\right)dy}=\frac{8y}{\int_0^{1-\frac{1}{3}}\frac{24}{3}ydy}=\frac{9}{2}y$$

$$f_{Y/X=3}(y)=\frac{9}{2}y\,,\quad 0\leq y\leq\frac{2}{3}$$

C'est pourquoi

$P(Y<1/3/X=1/3)=\int_0^{1/3}f_{Y/X=3}(y)dy=\int_0^{1/3}\frac{9}{2}y\,dy=\frac{1}{4}$

Solution de l'exercice 4.10.5

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2} & 0\leq x\leq 2\\ 0 & sinon\end{cases}$$

$$f_{Y/X=x}(y)=\frac{1}{x}\;,\quad x\leq y\leq 2x$$

1- $f(x,y)=f(y/x).f(x)=\frac{1}{2x}\;,\;0\leq x\leq 2\;\;et\;\;x\leq y\leq 2x$
2- $P(Y<1)=\int_0^1\int_{\frac{y}{2}}^{y}\frac{1}{2x}dxdy=\frac{1}{2}\int_0^1 Lnx\Big|_{\frac{y}{2}}^{y}=\frac{1}{2}Ln2=0.346$
3- $E(Y)=E\big(E(Y/X)\big)=E\left(\frac{3X}{2}\right)=\frac{3}{2}E(X)=\frac{3}{2}$

Parce que X est uniforme entre 0 and 2.

Solution de l'exercice 4.10.6

1- On peut écrire $f(x,y)=f(x)*f(y)$

Ou $f(x)=2e^{-2x},\;x\geq 0\quad and\;\;f(y)=2e^{-2y},\;y\geq 0$

Ainsi, X et Y sont indépendants

2-

$E(Y/X>2)=\int yf_{Y/X>2}\,(y)dy$

$$f_{Y/X>2}\,(y)=\frac{\int_2^\infty \boldsymbol{f(x,y)dx}}{\int_2^\infty \boldsymbol{f(x)dx}}=\frac{\int_2^\infty \boldsymbol{f(x)*f(y)dx}}{\int_2^\infty \boldsymbol{f(x)dx}}=\boldsymbol{f(y)}$$

$E(Y/X>2)=\int_0^\infty yf(y)dy=E(Y)=\frac{1}{3}$

Noter que :

$$\boldsymbol{P(X/a \leq Y \leq b) = \frac{\int_a^b f(x,y)dy}{\int_a^b f(y)dy}}$$

$$\boldsymbol{P(a \leq Y \leq b/X = x) = \int_a^b f(Y/X = x)dy}$$

et

$$\boldsymbol{P(Y/a \leq X \leq b) = \frac{\int_a^b f(x,y)dx}{\int_a^b f(x)dx}}$$

$$\boldsymbol{P(a \leq X \leq b/Y = y) = \int_a^b f(X/Y = y)dx}$$

2ème Méthode : Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes, alors :

$$\boldsymbol{E(X/Y) = E(X)}$$

Since X and Y are independent, we have

$E(Y/X > 2) = E(Y)$, note that $Y \backsim Exp(3)$, thus $E(Y) = 1/3$

3- We have

$$P(X > Y) = \int_0^\infty \int_y^\infty 6e^{-(2x+3y)}dxdy$$

$$= \int_0^\infty 3e^{-5y}\, dy$$

$$= \frac{3}{5}$$

Solution de l'exercice 4.10.7:

Cela n'est pas difficile sur le plan conceptuel, mais les calculs sont longs, nous avons

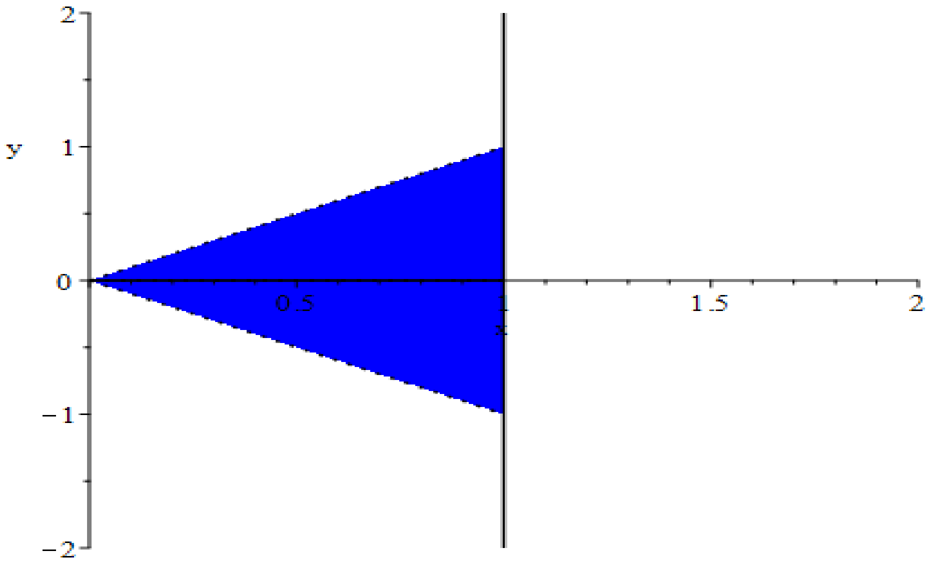
$$E(X) = \int_0^1 \int_x^{2x} \frac{8}{3} yx^2 dydx = \frac{4}{5}$$

$$E(Y) = \int_0^1 \int_x^{2x} \frac{8}{3} xy^2 dydx = \frac{56}{45}$$

$$E(X.Y) = \int_0^1 \int_x^{2x} \frac{8}{3} x^2y^2 dydx = \frac{28}{27}$$

$$Cov(X,Y) = E(X.Y) - E(X).E(Y) = 0.04$$

Solution de l'exercice 4.10.8



$$E(X/Y) = \int x f_{X/Y}(x)dx$$

$$f(x) = \int_{-x}^{x} dy = 2x$$

$$f(x) = 2x, \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$f(y) = \begin{cases} \int_{-y}^{1} dx & -1 < y < 0 \\ \int_{y}^{1} dx & 0 < y < 1 \end{cases}$$

$$f(y) = \begin{cases} 1 + y & -1 < y < 0 \\ 1 - y & 0 < y < 1 \end{cases}$$

$$\boldsymbol{f(y) = 1 - |y|\ , \quad -1 < y < 1}$$

Conditional distribution

$$f_{X/Y}(x) = \frac{f(x,y)}{f(y)} = \begin{cases} \dfrac{1}{1+y} & , -y < x < 1 \\ \dfrac{1}{1-y} & , \ 1 < x < y \end{cases}$$

$$\mathrm{E}(X/Y) = \int x f_{X/Y}(x)dx = \begin{cases} \dfrac{1}{1+y}\displaystyle\int_{-y}^{1} xdx = \dfrac{1-y}{2} \\ \dfrac{1}{1-y}\displaystyle\int_{1}^{y} xdx = \dfrac{1+y}{2} \end{cases}$$

$$\mathbf{E}(\boldsymbol{X}/\boldsymbol{Y}) = \begin{cases} \dfrac{\mathbf{1}-\boldsymbol{y}}{\mathbf{2}} \ , & -\mathbf{1} < \boldsymbol{y} < \mathbf{0} \\ \dfrac{\mathbf{1}+\boldsymbol{y}}{\mathbf{2}} \ , & \mathbf{0} < \boldsymbol{y} < \mathbf{1} \end{cases}$$

Hence

$$f_{Y/X}(y) = \frac{f(x,y)}{f(x)} = \frac{1}{2x} \ , -x < y < x$$

$$\mathrm{E}(Y/X) = \int y f_{Y/X}(y)dy = \frac{1}{2x}\int_{-x}^{x} ydy = \frac{1}{2x}\frac{y^2}{2}\bigg|_{-x}^{x} = 0$$

$$\mathrm{E}(Y/X) = 0 \ , \qquad 0 < x < 1$$

Solution de l'exercice 4.10.9

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \begin{cases} \mathbf{1} - \boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{b}\boldsymbol{y}} + \boldsymbol{e}^{-(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}\boldsymbol{y})} & \boldsymbol{si} \quad \boldsymbol{x} \geq \mathbf{0} \ \boldsymbol{et} \ \boldsymbol{y} \geq \mathbf{0} \quad \boldsymbol{avec} \ \boldsymbol{b} > \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{sinon} \end{cases}$$

1- b=1

$$F(x,y) = 1 - e^{-x} - e^{-y} + e^{-(x+y)}$$

$$P\big((X=1) \cap (Y \leq 2)\big) = 0$$

$$P\big((X \leq 2) \cap (Y \leq 2)\big) = F(2,2) = 1 - 2e^{-2} + e^{-4}$$

$$P(X \leq 1) = F_X(1) = \lim_{y \to +\infty} F(1,y) = \lim_{y \to +\infty} 1 - e^{-1} + e^{-y} + e^{-(1+y)} = 1 - e^{-1}$$

2- $F_X(x) = \lim\limits_{y \to +\infty} F(x,y) = 1 - e^{-x}$; $x \geq 0$

$$F_Y(y) = \lim_{x \to +\infty} F(x,y) = 1 - e^{-y} \ ; \ y \geq 0$$

On constate que : $F(x,y) = F(x) * F(y)$, on conclut que : $X \ et \ Y \ sont \ indépendantes$.

On considère pour la suite : $b = 2$

3- $F(x,y) = 1 - e^{-x} - e^{-2y} + e^{-(x+2y)}$

$$f(x,y)=\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}[e^{-x}-e^{-2y}e^{-x}]=-e^{-x}[-2e^{-2y}]=2e^{-2y}e^{-x}\ ,$$
$$x\geq 0\ et\ y\geq 0$$

$$X\leadsto Exp(1)\quad et\quad Y\leadsto Exp(2)\ ,\quad X\perp Y$$

4- $f_{Y/X}(y)=\frac{f(x,y)}{f(x)}=f(y)=2e^{-2y}$; $\quad y\geq 0$

5- $P(X\leq Y\leq 1)=\int_0^1\int_x^1 f(x,y)dydx=\int_0^1\int_x^1 2e^{-2y}e^{-x}dydx=-e^{-2}+\frac{2}{3}e^{-3}+\frac{1}{3}$

6- La loi $Z=\frac{1}{Y}$

$$F_Z(z)=P(Z\leq z)=P\left(\frac{1}{Y}\leq z\right)=P\left(Y\geq\frac{1}{z}\right)=1-F_Y\left(\frac{1}{z}\right)$$

$$f_Z(z)=\frac{1}{z^2}f_Y\left(\frac{1}{z}\right)=\frac{2}{z^2}e^{-\frac{2}{z}}\quad ;\quad z>0$$

Solution de l'exercice 4.10.10

$$f(x,y)=\frac{2}{x}e^{-2x}\ ,\qquad x>0\ ,\ \ 0<y\leq x$$

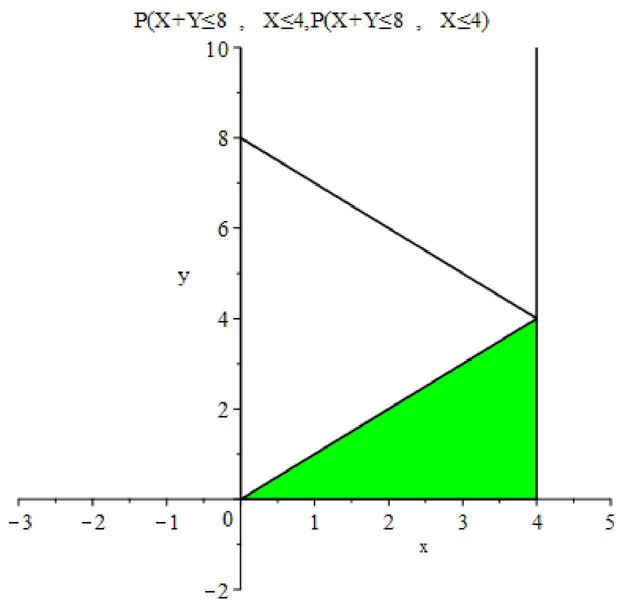
1- $f(x)=2e^{-2x}\ ,x>0\quad alors\text{: } X\leadsto Exp(2)$

2- $f_{Y/X}(y)=\frac{1}{x},\ 0<y\leq x$

3- $E(Y^2+2X/X=2)=E(Y^2+4/X=2)=E(Y^2/X=2)+4=\frac{4}{3}+4=\frac{16}{3}$

4- $E(Y)=E\big(E(Y/X)\big)=E\left(\frac{X}{2}\right)=\frac{1}{2}E(X)=\frac{1}{4}$

5- $P(X+Y\leq 8\ ,\ X\leq 4)=\int_0^4\int_0^x f(x,y)dydx=1-e^{-8}.$



Solution de l'exercice 4.10.11

1- On pose : $U = X,\ V = X + Y$

$\varphi: \begin{cases} U = X \\ V = X + Y \end{cases} \iff \varphi^{-1} = \begin{cases} X = U \\ Y = V - U \end{cases}$

$$J_{\varphi^{-1}} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$f_{U,V}(u,v) = f_{(X,Y)}(\varphi^{-1}(u,v)).\left|J_{\varphi^{-1}}\right|$$

$$= f_{(X,Y)}(u, v-u) = e^{-(v-u)} \ , \quad 0 \le u \le v - u$$

La loi de $V = X + Y$:

$$f_V(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{U,V}(u,v)du$$

$$= \int_0^{\frac{v}{2}} e^{-(v-u)}du = e^{-v}[e^u]_0^{\frac{v}{2}} = e^{-v}\left(e^{\frac{v}{2}} - 1\right) = e^{-\frac{v}{2}} - e^{-v}$$

$$f_V(v) = e^{-\frac{v}{2}} - e^{-v} \ , \quad v > 0$$

2- On pose : $U = X,\ V = X - Y$

$\varphi: \begin{cases} U = X \\ V = X - Y \end{cases} \iff \varphi^{-1} = \begin{cases} X = U \\ Y = U - V \end{cases}$

$$J_{\varphi^{-1}} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

$$f_{U,V}(u,v) = f_{(X,Y)}(\varphi^{-1}(u,v)).\left|J_{\varphi^{-1}}\right|$$

$$= f_{(X,Y)}(u, u-v) = e^{-(u-v)} \ , \ 0 < u \le u - v$$

$$f_{U,V}(u,v) = e^{-u}e^{v} \ , \qquad u > 0 \ \ et \ \ v \le 0$$

Les lois marginales de U et V

$$f_U(u) = e^{-u}\int_{-\infty}^{0} e^{v}dv = e^{-u} \quad , u > 0$$

$$f_V(v) = e^{v}\int_0^{\infty} e^{-u}du = e^{v} \ , \ \ v < 0$$

On remarque que U et V sont indépendantes.

Solution de l'exercice 4.10.12

On pose : $U = X^2,\ V = Y^2$

$\varphi: \begin{cases} U = X^2 \\ V = Y^2 \end{cases} \iff \varphi^{-1} = \begin{cases} X = \sqrt{U} \\ Y = \sqrt{V} \end{cases}$

$$J_{\varphi^{-1}} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2\sqrt{U}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2\sqrt{V}} \end{vmatrix} = \frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{UV}}$$

$$f_{U,V}(u,v) = f_{(X,Y)}(\varphi^{-1}(u,v)).\left|J_{\varphi^{-1}}\right|$$

$$= f_{(X,Y)}\left(\sqrt{u},\sqrt{v}\right).\frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{uv}}$$

$$= \frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{uv}} \quad , \quad 0 < u < 1 \quad et \;\; 0 < v < 1$$

$$f_U(u) = \int_0^1 f_{U,V}(u,v)dv = \int_0^1 \frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{uv}}dv = \frac{1}{4\sqrt{u}}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{v}}dv = \frac{1}{2\sqrt{u}}$$

$$f_U(u) = \frac{1}{2\sqrt{u}} \; , \quad u \in [0,1] \qquad et \quad f_V(v) = \frac{1}{2\sqrt{v}} \; , \qquad v \in [0,1]$$

On en déduit que U et V sont indépendantes.

Solution de l'exercice 4.10.13

1-

$$f(x,y) = ke^{-\theta y} \quad , \quad 0 \le x \le y$$

$$\text{k}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-\theta y}dxdy = 1 \Leftrightarrow k\int_0^{+\infty} e^{-\theta y}dy\int_0^y dx = 1$$

$$\text{k}\int_0^{+\infty} y\, e^{-\theta y}dy = k\frac{\Gamma(2)}{\theta^2} = 1 \Leftrightarrow k = \theta^2$$

2-

$$f_X(x) = \theta^2\int_x^{+\infty} e^{-\theta y}dy = \theta^2\left[-\frac{1}{\theta}e^{-\theta y}\right]_x^{+\infty} = \theta e^{-\theta x} \;\; , \;\; x > 0$$

$$X \leadsto Exp(\theta) = \gamma(1,\theta)$$

$$f_Y(y) = \theta^2 e^{-\theta y}\int_0^y dx = \theta^2 y e^{-\theta y} \quad , y > 0$$

$$Y \leadsto \gamma(2,\theta)$$

$$X \; et \; Y \; ne \; sont \; pas \; indépendantes$$

3-

$$P(X \le 1, Y \le 1) = \int_0^1\int_0^y \theta^2 e^{-\theta y}dxdy = \int_0^1 \theta^2 y e^{-\theta y}\,dy = 1 - e^{-\theta} - \theta e^{-\theta}$$

$$P(X \le 1/Y \le 1). = \frac{P(X \le 1, Y \le 1)}{P(Y \le 1)} = 1$$

Car :

$$P(Y \leq 1) = \int_0^1 f(y)dy = \theta^2 \int_0^1 ye^{-\theta y}dy = P(X \leq 1, Y \leq 1)$$

4-

la loi de $(X, Y - X)$:

1- $U = X,\ V = Y - X$

$$\varphi: \begin{cases} U = X \\ V = Y - X \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \varphi^{-1} = \begin{cases} X = U \\ Y = V + U \end{cases}$$

$$J_{\varphi^{-1}} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$f_{U,V}(u,v) = f_{(X,Y)}(\varphi^{-1}(u,v)).\left|J_{\varphi^{-1}}\right|$$

$$f_{U,V}(u,v) = f_{(X,Y)}(u, v+u) = \theta^2 e^{-\theta(v+u)} \quad , \quad 0 \leq u \leq v + u$$

$$f_{U,V}(u,v) = \theta^2 e^{-\theta u} e^{-\theta v} \quad , \quad u \geq 0 \ \ et \ \ v \geq 0$$

$$f_U(u) = \theta e^{-\theta u} \quad , \qquad u \geq 0$$

$$f_V(v) = \theta e^{-\theta v} \quad , \quad v \geq 0$$

$$donc: \quad U \ et \ V \ sont \ indépendantes$$

Bibliographie

[1] A. Perrut, Cours de probabilités et statistiques, Université Claude Bernard Lyon 1, 2010.

[2] A Tortrat, Calcul de Probabilités, Masson-Paris 1963.

[3] Bruno Saussereau, Cours de théorie des probabilités avec exercices corrigés et devoirs, Année universitaire 2013-2014.

[4] C. Fiszka, Cours d'introduction aux probabilités, Université Paris VII, 2013.

[5] CUAZ. M, Cours et exercices de mathématiques, Probabilités, http://mathscyr.free.fr.

[6] D. Daccuna Castelle, M. Duo, Probabilités et Statistiques, Problèmes à temps fixe, Masson-Paris 1982.

[7] DUSART. Pierre, Cours de Probabilités, France, 2013.

[8] Fabrice Rossi & Fabrice Le Lec, Exercices corrigés de probabilités et statistique, Université Paris Panthéon-Sorbonne, 2012.

[9] Jean-François Delmas, Introduction au calcul des probabilités et à la statistique,
Les Presses de l'ENSTA, Paris, ISBN 978-2-7225-0922-1, 2010.

[10] Jean-Jacques Ruch et Marie-Line Chabanol, Rappels de probabilités, Préparation à l'agrégation Bordeaux 1, 2012 - 2013.

[11] Kaci Redjal, Cours de probabilités, L'office des publications universitaires, Algérie1988.

[12] Murray R. Spiegel, Probabilités et Statistique, Cours et problèmes, ISBN : 2-7042-1030-Paris 6 ,1981.

[13] Nils Berglund, Probabilités et Statistiques, Université d'Orléans, Version de Mars
2010.

[14] Olivier Arrigoni .,Analyse et probabilités - Licence 2e année - Cours et travaux dirigés de mathématiques". 2024